

**UNIVERSITE MOHAMED BEN ABDELLAH  
FACULTÉ DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**COURS D'ANALYSE 1–Filière SMA-SMI.**

**Par Brahim BOUSSOUIS**



**Année universitaire : 2014-2015**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Le corps des nombres réels</b>	<b>5</b>
1.1 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$ .	5
1.1.1 $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif.	5
1.1.2 $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.	6
1.1.3 $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.	8
1.2 Propriétés élémentaires de $\mathbb{R}$ .	9
1.2.1 Propriétés de corps commutatif totalement ordonné.	9
1.2.2 Conséquences de la propriété de la borne supérieure.	11
1.3 La droite numérique achevée	15
<b>2 Suites réelles</b>	<b>17</b>
2.1 Généralités	17
2.2 Suites convergentes.	18
2.2.1 Limites infinies.	18
2.2.2 Opérations sur les limites	20
2.3 Outils pour étudier les suites	21
2.3.1 Limites et monotonie	21
2.3.2 Limites et relation d'ordre	23
2.3.3 Suites de Cauchy	24
2.3.4 Suites équivalentes	25
2.3.5 Suites récurrentes	26
2.3.6 Valeurs d'adhérence et Théorème de Bolzano-Weierstrass	29
<b>3 Limites et Continuité d'une fonction</b>	<b>31</b>
3.1 Limite ponctuelle d'une fonction.	31
3.1.1 Voisinages d'un point, Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ .	31
3.1.2 Limites par valeurs différentes, limites à droite et limites à gauche	33
3.1.3 Limites infinies	34
3.1.4 Caractérisation séquentielle	35
3.1.5 Opérations sur les limites	36
3.1.6 Théorème de la limite monotone	36
3.1.7 Critère de Cauchy pour les fonctions	37
3.1.8 Equivalence des fonctions au voisinage d'un point	39
3.2 Continuité des fonctions	39

3.2.1	Propriétés des fonctions continues . . . . .	40
3.3	Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues . . . . .	41
3.3.1	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	41
3.3.2	Théorème des valeurs extrémales . . . . .	43
3.3.3	Théorème de Heine . . . . .	44
3.3.4	Monotonie et continuité . . . . .	44
3.3.5	Applications : Réciproques des fonctions circulaires . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Dérivées</b>	<b>47</b>
4.1	Applications dérivables . . . . .	47
4.1.1	Règles de dérivation . . . . .	49
4.1.2	Extrema relatifs . . . . .	52
4.2	Théorème des Accroissements Finis . . . . .	53
4.2.1	Autres formulations du théorème des accroissements finis . . . . .	54
4.2.2	Applications du théorème des accroissements finis . . . . .	55
4.3	Fonctions hyperboliques . . . . .	56
4.3.1	Fonctions hyperboliques directes . . . . .	56
4.3.2	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	58
	<b>Bibliographie</b>	<b>60</b>

# Introduction

Ce polycopié contient le cours d'analyse I de la filière SMA-SMI. C'est un outil pédagogique qui vous facilitera la prise de notes pendant le cours magistral et vous permettra de traiter les exercices. Il ne vous dispense pas d'assister aux cours magistraux et aux séances de travaux dirigés, et ne vous dispense pas non plus de consulter d'autres livres pour voir d'autres exemples et d'autres démonstrations (par exemple, les ouvrages [1],[2], [3] de la bibliographie).

Vous tirerez un meilleur profit de ce polycopié en suivant les conseils suivants :

- Apprenez par cœur les définitions et les formules.
- Lisez mot à mot l'énoncé des théorèmes et leurs démonstrations, en vous efforçant de comprendre l'enchaînement logique.
- Essayez ensuite de refaire les démonstrations sur feuille, sans vous référer au polycopié (ou à un autre ouvrage).
- Cherchez des généralisations possibles. Tâchez de supprimer ou d'affaiblir certaines hypothèses du théorème.
- Essayez de résoudre des exercices nombreux et variés, pour apprendre à utiliser les théorèmes du cours, et pour maîtriser les techniques de calcul. Apprenez aussi à rédiger correctement les solutions des exercices.

Octobre 2014

Boussouis B.

# Chapitre 1

## Le corps des nombres réels

**Introduction.** En partant de l'ensemble  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  (des entiers naturels) considéré comme une notion *primitive*, il est possible de construire l'ensemble  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  des *entiers relatifs*, puis à partir de  $\mathbb{Z}$ , on peut construire l'ensemble  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$  des nombres *rationnels*, et enfin, on peut construire l'ensemble  $\mathbb{R}$  à partir de  $\mathbb{Q}$ .

Nous n'aborderons pas ces constructions dans ce cours, car elles sont trop techniques et fastidieuses, et en plus elles ne joueront aucun rôle dans la suite. En fait dans la pratique, la façon de définir les nombres réels importe peu, et ce qui est important et doit être connu, ce sont les propriétés de ces nombres.

Nous supposerons connu l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels, avec son addition, sa multiplication, sa relation d'ordre et les relations qui relient les opérations et la relation d'ordre. En d'autres termes, nous supposerons connue la structure de  $\mathbb{Q}$  en tant que **corps commutatif totalement ordonné et archimèdien** (le sens de ces termes sera précisé dans la suite). Nous admettrons qu'il existe un unique corps commutatif totalement ordonné, noté  $\mathbb{R}$ , contenant l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels et qui vérifie la **propriété de la borne supérieure**. A partir de cette définition **axiomatique** de  $\mathbb{R}$ , nous déduisons les propriétés essentielles de  $\mathbb{R}$ .

### 1.1 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$ .

#### 1.1.1 $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif.

Nous admettons qu'il existe un ensemble, noté  $\mathbb{R}$ , contenant  $\mathbb{Q}$  et qui est muni de deux *lois de composition internes*, l'addition  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$  et la multiplication  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \times y$  (notée aussi  $x.y$  ou  $xy$ ) et qui vérifient les propriétés suivantes :

- |                   |  |  |
|-------------------|--|--|
| (A <sub>1</sub> ) | $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$   | (Commutativité de +) .                               |
| (A <sub>2</sub> ) | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$                              | (Associativité de +).                                |
| (A <sub>3</sub> ) | $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$  | (0 est l'élément neutre de +).                       |
| (A <sub>4</sub> ) | $\forall x \in \mathbb{R}, \exists(-x) \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$                     | (tout réel $x$ admet un <i>opposé</i> , noté $-x$ ). |
| (M <sub>1</sub> ) | $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = yx$   | (Commutativité de $\times$ ).                        |
| (M <sub>2</sub> ) | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(yz) = (xy)z$  | (Associativité de $\times$ ).                        |
| (M <sub>3</sub> ) | $\forall x \in \mathbb{R}, x.1 = x$  | (1 est l'élément neutre de $\times$ ).               |
| (M <sub>4</sub> ) | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(y + z) = xy + xz$                                     | (Distributivité de $\times$ par rapport à +).        |
| (M <sub>5</sub> ) | $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}, x \times x^{-1} = 1$ | (tout réel non nul admet un inverse).                |

**Remarques 1.1.1.** — On résume les propriétés (A<sub>1</sub>)—(A<sub>4</sub>) en disant que  $(\mathbb{R}, +)$  est un **groupe commutatif (ou abélien)**.

- On résume les propriétés (A<sub>1</sub>)—(A<sub>4</sub>) et (M<sub>1</sub>)—(M<sub>4</sub>), en disant que  $(\mathbb{R}, +, \times)$  est un **anneau commutatif unitaire**. Signalons que  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  et  $(\mathbb{Q}, +, \times)$  sont aussi deux anneaux commutatifs unitaires.
- On résume les propriétés (A<sub>1</sub>)—(A<sub>4</sub>) et (M<sub>1</sub>)—(M<sub>5</sub>), en disant que  $(\mathbb{R}, +, \times)$  est un **corps commutatif**. Signalons que  $(\mathbb{Q}, +, \times)$  est aussi un corps commutatif, alors que  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  ne l'est pas.
- On note  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Les propriétés (M<sub>1</sub>), (M<sub>2</sub>), (M<sub>3</sub>) et (M<sub>5</sub>) expriment le fait que  $(\mathbb{R}^*, \times)$  est un groupe commutatif.

### 1.1.2 $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

Nous admettons de plus, que  $\mathbb{R}$  est muni d'une relation binaire  $\leq$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- |                   |  |   |
|-------------------|--|---|
| (O <sub>1</sub> ) | $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$   | (réflexivité)   |
| (O <sub>2</sub> ) | $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$                   | (antisymétrie)  |
| (O <sub>3</sub> ) | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$             | (transitivité).   |
| (O <sub>4</sub> ) | $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$                               | (deux réels quelconques sont comparables)                       |
| (O <sub>5</sub> ) | $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{R}, x + z \leq y + z)$ | (compatibilité avec l'addition).                                |
| (O <sub>6</sub> ) | $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \Rightarrow (\forall z \geq 0, xz \leq yz)$               | (compatibilité avec la multiplication par les réels $\geq 0$ ). |

**Remarques 1.1.2.** —  $x \leq y$  ( $x$  est inférieur ou égal à  $y$ ) est noté aussi  $y \geq x$  ( $y$  est supérieur ou égal à  $x$ ). Si  $x \leq y$  et  $x \neq y$ , on note  $x < y$  ( $x$  est strictement inférieur à  $y$ ) (ou  $y > x$  :  $y$  est strictement supérieur à  $x$ ).

- On résume les propriétés (O<sub>1</sub>)—(O<sub>3</sub>) en disant que  $\leq$  est une **relation d'ordre** sur  $\mathbb{R}$  (ou que  $(\mathbb{R}, \leq)$  est un **ensemble ordonné**), et on exprime les quatre propriétés (O<sub>1</sub>)—(O<sub>4</sub>) en disant que  $\leq$  est une **relation d'ordre total** (ou encore que  $(\mathbb{R}, \leq)$  est **totalement ordonné**).<sup>1</sup>
- On résume les propriétés (A<sub>1</sub>)—(A<sub>4</sub>), (M<sub>1</sub>)—(M<sub>5</sub>) et (O<sub>1</sub>)—(O<sub>6</sub>) en disant que  $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$  est un **corps commutatif totalement ordonné**.
- Signalons que  $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$  est un corps commutatif totalement ordonné.

1. Une relation d'ordre qui ne vérifie pas la condition (O<sub>4</sub>) est appelée relation d'ordre *partiel*. Par exemple, la relation “ $x$  divise  $y$ ” est une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}$ .

## Majorants, Minorants, Bornes supérieure et inférieure.

**Définition 1.1.1.** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné (par exemple  $\mathbb{R}$  muni de sa relation d'ordre usuelle) et soient  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $M \in E$ . On dit que :

1.  $M$  est un **majorant** de  $A$  (ou encore que  $M$  majore  $A$ ) si  $x \leq M, \forall x \in A$ .
2.  $M$  est le **plus grand élément (ou le maximum)** de  $A$  si  $M \in A$  et  $M$  majore  $A$  :

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A, x \leq M \end{cases} \quad (1.1)$$

3.  $M$  est la **borne supérieure** de  $A$  si  $M$  est le plus petit des majorants de  $A$  :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} (i) \quad \forall x \in A, & x \leq M; \\ (ii) \quad \forall y \in E, & (y < M) \Rightarrow (\exists x \in A, y < x \leq M). \end{cases} \quad (1.2)$$

De manière analogue, soit  $m$  un élément de  $E$ . On dit que :

1.  $m$  est un **minorant** de  $A$  (ou encore que  $m$  minore  $A$ ) si  $m \leq x, \forall x \in A$ .
2.  $m$  est le **plus petit élément (ou le minimum)** de  $A$  si  $m \in A$  et  $m$  minore  $A$  :

$$m = \min A \iff \begin{cases} m \in A \\ \forall x \in A, m \leq x \end{cases} \quad (1.3)$$

3.  $m$  est la **borne inférieure** de  $A$  si  $m$  est le plus grand des minorants de  $A$  :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} (i) \quad \forall x \in A, & m \leq x; \\ (ii) \quad \forall y \in E, & (m < y) \Rightarrow (\exists x \in A, m \leq x < y). \end{cases} \quad (1.4)$$

4. L'ensemble  $A$  est dit **majoré** (resp. **minoré**) s'il admet des majorants (resp. des minorants).  $A$  est dit **borné** s'il est à la fois majoré et minoré

- Remarques 1.1.3.**
1. La condition (i) de (1.2) veut dire que  $M$  est un majorant de  $A$  et la condition (ii) de (1.2) veut dire que si un élément  $y \in E$  est strictement inférieur à  $M$ , alors  $y$  n'est plus un majorant de  $A$ . Donc  $M$  est le plus petit des majorants de  $A$  (et à ce titre, la borne supérieure de  $A$  est unique s'elle existe).
  2. De même, la condition (i) de (1.4) veut dire que  $m$  est un minorant de  $A$  et la condition (ii) de (1.4) signifie que si un élément  $y \in E$  est strictement supérieur à  $m$ , alors  $y$  n'est plus un minorant de  $A$ . Donc  $m$  est le plus grand des minorants de  $A$  (donc la borne inférieure de  $A$  est unique, s'elle existe).
  3. Si  $A$  admet un plus grand élément, alors celui-ci est unique et dans ce cas,  $A$  admet aussi une borne supérieure et  $\sup A = \max A$ . De même, si  $A$  admet un plus petit élément, alors celui-ci est unique et  $A$  admet une borne inférieure  $\inf A = \min A$ .
  4. Il se peut que  $A$  admette une borne supérieure (resp. une borne inférieure) sans admettre de maximum (resp. de minimum). Par exemple, soit  $A$  l'intervalle  $]0, 1[$  (ie. l'ensemble des réels  $x$  tels que  $0 < x < 1$ ). On a  $\sup A = 1$  et  $\inf A = 0$ , mais  $A$  n'admet ni de plus grand élément ni de plus petit élément.

### 1.1.3 $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Nous admettons qu'en plus de sa structure de corps commutatif totalement ordonné,  $\mathbb{R}$  possède aussi la **propriété de la borne supérieure**, c'est-à-dire que

**toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure.**

Cette propriété est spécifique au corps  $\mathbb{R}$  des réels, car nous allons voir que  $\mathbb{Q}$  ne possède pas cette propriété.

**Lemme 1.** *Il n'existe pas de rationnel  $r$  vérifiant l'équation  $r^2 = 2$ .*

*Démonstration.* S'il existait un rationnel  $r$  tel que  $r^2 = 2$ , on pourrait l'écrire sous la forme  $r = p/q$ , avec  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ,  $p \wedge q = \text{p.g.c.d.}(p, q) = 1$ . On en déduirait que  $p^2 = 2q^2$ , que 2 divise  $p^2$  et que 2 divise  $p$  (théorème de Gauss) :  $p = 2p'$  ; Il s'ensuit que  $q^2 = 2p'^2$ , et par le même raisonnement que 2 divise  $q$  :  $q = 2q'$ . On aboutit à une contradiction, puisque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.  $\square$

**Lemme 2.** *Il existe des parties non vides et majorées de  $\mathbb{Q}$  qui ne possèdent pas de borne supérieure (appartenant à  $\mathbb{Q}$ ).*

*Démonstration.* En effet, soit  $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ .  $A$  est non vide ( car  $1 \in A$  ), et majoré (par 2), mais  $A$  n'admet pas de borne supérieure (dans  $\mathbb{Q}$ ) : sinon, il existerait  $x \in \mathbb{Q}, x = \sup A$  ; On a  $x \geq 1$ , et d'après le lemme précédent,  $x^2 \neq 2$ . Deux cas sont possibles :

**1<sup>er</sup> cas  $x^2 < 2$  :** On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x+1}{n}.$$

Donc, en choisissant  $n > \frac{2x+1}{2-x^2}$  (propriété d'Archimède dans  $\mathbb{Q}^2$ ), on aurait :

$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$  et  $x + \frac{1}{n} \in A$ . On aboutit à une contradiction, puisque  $x + \frac{1}{n} > x = \sup A$ .

**2<sup>eme</sup> cas  $x^2 > 2$  :** On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 - 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \geq x^2 - 2\frac{x}{n}.$$

Donc, en choisissant  $n > \frac{2x}{x^2-2}$ , on aurait :  $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ . Or  $x - \frac{1}{n} < x$ , donc il existe  $r \in A$  tel que  $0 < x - \frac{1}{n} < r \leq x$ , et par suite :

$$\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 < r^2 < 2.$$

Contradiction.

---

2. Il s'agit de la propriété selon laquelle, pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > r$ .



□

**Remarque 1.1.1.** En tant que partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ , la partie  $A$  ci-dessus possède une borne supérieure, qu'on note  $\sqrt{2}$ . Les réels qui, comme  $\sqrt{2}$ , ne sont pas rationnels sont dits *irrationnels*.

**Remarque 1.1.2** (Droite réelle). On représente  $\mathbb{R}$  par une droite affine orientée, munie d'une origine  $O$  représentant le nombre 0. Chaque réel  $x$  est représenté par le point  $M$  d'abscisse  $x$  de telle sorte que  $\overline{OM}$  est orienté positivement (resp. négativement) selon que  $x > 0$  (resp.  $x < 0$ ). Il en résulte que  $\mathbb{R}$  est intuitivement "continu" (sans trous).

## 1.2 Propriétés élémentaires de $\mathbb{R}$ .

### 1.2.1 Propriétés de corps commutatif totalement ordonné.

Les propriétés suivantes sont communes à tous les corps commutatifs totalement ordonnés.

**Caractérisation des bornes supérieures et inférieures d'une partie de  $\mathbb{R}$ .**

**Proposition 1.2.1.** Soient  $\mathbb{K}$  un corps commutatif totalement ordonné (par exemple  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Q}$ ) et  $\mathbb{K}_+^* = \{x \in \mathbb{K} : x > 0\}$ . Soient  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{K}$  et  $m, M \in \mathbb{K}$ . Alors, on a :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} (i) & \forall x \in A, x \leq M; \\ (ii) & \forall \varepsilon \in \mathbb{K}_+^*, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M. \end{cases} \quad (1.5)$$

De même,

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, m \leq x; \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{K}_+^*, \exists x \in A, m \leq x < m + \varepsilon. \end{cases} \quad (1.6)$$

*Démonstration.* Montrons, par exemple, que la condition (ii) de (1.2) est équivalente à la condition (ii) de (1.5) (l'équivalence de la deuxième condition de (1.4) et de la deuxième condition de (1.3) se fait de manière analogue). Si la deuxième condition de (1.2) est vérifiée, alors pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ ,  $y = M - \varepsilon \in \mathbb{K}$  est tel que  $y < M$ . Donc il existe  $x \in A$  tel que  $y = M - \varepsilon < x \leq M$ , donc la deuxième condition de (1.5) est vérifiée. Inversement, si la deuxième condition de (1.5) est satisfaite, alors pour tout  $y \in \mathbb{K}$  tel que  $y < M$ , on peut trouver  $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$  tel que  $y = M - \varepsilon$  (il suffit de prendre  $\varepsilon = M - y$ ). Donc, on peut trouver  $x \in A$  tel que  $M - \varepsilon = y < x \leq M$ . Donc la deuxième condition de (1.2) est satisfaite. □

**Proposition 1.2.2.** Dans  $\mathbb{R}$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

- On n'a pas besoin de mettre des parenthèses pour calculer  $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$  (ou  $x(yz) = (xy)z = xyz$ ), et on peut additionner (ou multiplier) un nombre fini de nombres réels, sans se soucier de l'ordre dans lequel on fait ces opérations.

Ceci permet d'envisager des expressions de la forme  $\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  et

$$\prod_{k=1}^n x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$ .
- Si  $x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n$ , alors

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i.$$

avec égalité si et seulement si  $x_i = y_i, i = 1, \dots, n$ .

- $x \leq y \iff x - y \leq 0 \iff y - x \geq 0 \iff (-y) \geq (-x)$ .
- $x < y \iff x - y < 0 \iff y - x > 0 \iff (-y) < (-x)$ .
- $x < y \iff \exists z \in \mathbb{R}, x + z < y + z \iff \forall z \in \mathbb{R}, x + z < y + z$ .
- Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . alors, on a :

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff \forall \varepsilon > 0, x < y + \varepsilon. \\ x \leq 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

### Valeur absolue et distance

**Définition 1.2.1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La valeur absolue de  $x$  est le nombre

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

On dit que le corps  $\mathbb{R}$  est **valué**.

**Proposition 1.2.3.** La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x|. \\ |x| &= |-x| \geq 0. \\ |x| = 0 &\iff x = 0. \\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y|. \\ |x| \leq a &\iff -a \leq x \leq a. \\ |x| > a > 0 &\iff x > a \text{ ou } x < -a. \\ ||x| - |y|| &\leq |x \pm y| \leq |x| + |y|. \\ \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k|. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

**Définition 1.2.2.** La distance de deux nombres réels  $x$  et  $y$  est le nombre  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Proposition 1.2.4.** La distance vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) &\geq 0. \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) = 0 &\iff x = y. \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) &= d(y, x) \text{ (symétrie)}. \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}, d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (Inégalité triangulaire)}. \end{aligned}$$

## Intervalles de $\mathbb{R}$ .

Il existe neuf types d'intervalles sur  $\mathbb{R}$  :

- les intervalles bornés d'extrémités  $a$  et  $b$  ( $a \leq b$ ) :
  - $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  (intervalle fermé);
  - $]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  (intervalle ouvert);
  - $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  (intervalle semi-ouvert);
  - $[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  (intervalle semi-ouvert);
  - On convient que  $]a, a[ = \emptyset$  ( $\emptyset$  est considéré comme un intervalle ouvert).
- les intervalles non bornés :
  - $[a, +\infty[ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ ;
  - $] -\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ;
  - $] -\infty, a[ := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ ;
  - $]a, +\infty[ := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ;
  - $] -\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ .

### 1.2.2 Conséquences de la propriété de la borne supérieure.

$\mathbb{R}$  possède la propriété de la borne inférieure

**Proposition 1.2.5.**  $\mathbb{R}$  possède la propriété de la borne inférieure, c'est-à-dire que toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne inférieure.

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  et soit  $m$  un minorant de  $A$ . Posons

$$(-A) = \{-x : x \in A\}.$$

Alors  $(-A)$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide et majorée (par  $-m$ ). Donc  $(-A)$  admet une borne supérieure  $s = \sup(-A)$ .  $s$  majore  $(-A)$ , donc  $-s$  minore  $A$ . Si  $y \in \mathbb{R}$  est tel que  $-s < y$ , alors  $-y < s = \sup(-A)$ . Par définition de la borne supérieure, il existe  $x \in (-A)$  tel que  $-y < x \iff \underbrace{-x}_{\in A} < y$ . Donc  $-s$  est le plus grand des minorants de  $A$  ou encore  $-s$  est la borne inférieure de  $A$ .  $\square$

### Propriété d'Archimède

**Théorème 1.2.1** (Propriété d'Archimède). Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , et pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $y < nx$ .

*Démonstration.* Soit  $A = \{nx/n \in \mathbb{N}\}$  ;  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Si  $A$  est majorée par  $y$ , il existerait  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $s = \sup A$ . Comme  $(s - x) < s$ , on pourrait trouver  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $(s - x) < nx \leq s$  ; D'où  $s < (n + 1)x \in A$ , ce qui est absurde.  $\square$

**Exemple 1.2.1.** Soit  $A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . On a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{n-1}{n+1}$ . Comme  $0 \in A$ , on en déduit que  $0 = \min A = \inf A$ . Montrons que  $1 = \sup A$ . Comme  $n-1 < n+1$ , on a  $\frac{n-1}{n+1} < 1$ . Donc 1 majore  $A$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On a :

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1} \iff 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n.$$

(Un tel  $n$  existe par la propriété d'Archimède). Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in A$  ( $x = \frac{n-1}{n+1}$ , où  $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ ) tel que  $1 - \varepsilon < x < 1$ . Donc  $\sup A = 1$ .

### Partie entière.

**Théorème 1.2.2** (Partie entière d'un nombre réel). Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe un et un seul entier  $n \in \mathbb{Z}$ , tel que

$$n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon. \quad (1.7)$$

L'entier  $n$  qui correspond à  $\varepsilon = 1$ , s'appelle la **partie entière** de  $x$ , notée  $E(x)$ , ou encore  $[x]$ . le nombre  $x - E(x)$  s'appelle la **partie fractionnaire** de  $x$ .

*Démonstration.*     **Unicité** : Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers relatifs tels que :

$$n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon \quad \text{et} \quad m\varepsilon \leq x < (m+1)\varepsilon,$$

On aurait  $n\varepsilon < (m+1)\varepsilon$ , donc  $n < (m+1)$  et  $n \leq m$ . De la même manière, on obtiendrait  $n \leq m$ , donc  $m = n$ .

**Existence** : commençons par le cas  $x > 0$ . Soit  $A = \{m \in \mathbb{N} / x < m\varepsilon\}$ ;  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  (par la propriété d'Archimède); Soit  $p$  le plus petit élément de  $A$ . On a  $p \geq 1$  et  $(p-1) \notin A$ , donc  $n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon$ , où  $n = (p-1)$ .

Si  $x < 0$ , d'après ce qui précède, il existe  $m \in \mathbb{N}$ , tel que  $m\varepsilon \leq x < (m+1)\varepsilon$ . Il suffit de poser alors  $n = -(m+1)$  si  $x \neq -m\varepsilon$ , et  $n = -m$ , si  $x = -m\varepsilon$ . □

### Approximation décimale.

Parmi les rationnels, les décimaux ont une grande importance dans la pratique, puisqu'ils permettent d'*approcher* les nombres réels d'aussi près que l'on veut.

**Définition 1.2.3.** Un nombre réel  $d$  est dit **décimal** s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $10^k d \in \mathbb{Z}$ . L'ensemble des nombres décimaux est noté  $\mathbb{D}$ .

**Exemples 1.2.1.**     1.  $\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$ , car  $10^2 \cdot \frac{1}{4} = 25 \in \mathbb{Z}$ . On écrit alors

$$\frac{1}{4} = 25 \cdot 10^{-2} = 0,25 \iff \frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100}.$$

2.  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ .

**Théorème 1.2.3** (Approximation décimale). Etant donné un réel  $x$  et un entier naturel  $k$ , il existe un nombre décimal  $d_k$  unique tel que

$$10^k d_k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad d_k \leq x < d_k + 10^{-k} = d'_k. \quad (1.8)$$

$d_k$  est appelé **valeur approchée à  $10^{-k}$  près par défaut** de  $x$ , et  $d'_k$  est appelé **valeur approchée à  $10^{-k}$  près par excès** de  $x$ .

*Démonstration.* En effet,

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad & \iff 10^k d_k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 10^k d_k \leq 10^k x < 10^k d_k + 1 \\
 & \iff 10^k d_k = E(10^k x) \\
 d_k & = 10^{-k} E(10^k x).
 \end{aligned}$$

□

### Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ .

Voici une propriété importante de  $\mathbb{R}$  qui découle de l'existence de la partie entière.

**Théorème 1.2.4.** *Pour tous réels  $x < y$ , il existe un nombre rationnel  $r \in \mathbb{Q}$  (et donc une infinité) tel que  $x < r < y$ .*

*On exprime cette propriété en disant que  $\mathbb{Q}$  est **dense** dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ . Par la propriété d'Archimède, on dispose d'un entier naturel  $n$ , tel que  $1 < n(y - x)$ . Soit  $m = E(nx)$ ; On a alors :  $m \leq nx < m + 1$ , donc

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + y - x = y.$$

Donc le rationnel  $r = (m + 1)/n$  est compris entre  $x$  et  $y$ . En appliquant ce résultat, on pourrait intercaler un rationnel  $r_1$  entre  $x$  et  $r$  ( $x < r_1 < r$ ). En itérant ce procédé, on construirait une suite infinie  $(r_n)$  de rationnels deux à deux distincts tels que  $x < \dots < r_{n+1} < r_n < \dots < r_1 < r < y$ .

□

**Théorème 1.2.5.** *Entre deux réels distincts, il existe au moins un nombre irrationnel (donc une infinité).*

*On exprime cette propriété en disant que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est **dense** dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ . D'après la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , on pourrait trouver une infinité de rationnels entre  $\frac{x}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{y}{\sqrt{2}}$ . Donc on peut choisir  $r \in \mathbb{Q}^*$  tel que  $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$ . Le nombre  $r\sqrt{2}$  est irrationnel et il est compris entre  $x$  et  $y$ . □

### Quelques inégalités classiques.

**Proposition 1.2.6.** *Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :*

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (1.9)$$

*Démonstration.* On a :  $x^2 + y^2 - 2|xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$ . D'où l'inégalité cherchée. □

**Proposition 1.2.7** (Inégalité de Bernouilli). *Soit  $h$  un réel  $> -1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors, on a :*

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh. \quad (1.10)$$

*Démonstration.* Par récurrence (laissée en exercice).  $\square$

**Proposition 1.2.8** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soient  $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$ , des nombres réels. Alors, on a :*

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}. \quad (1.11)$$

*Démonstration.* Le trinôme du second degré

$$T(x) = \sum_{i=1}^n (a_i + x b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + x^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

est toujours positif, donc son discriminant (réduit)  $\Delta' = \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$  est négatif. D'où l'inégalité 1.11.  $\square$

**Corollaire 1.2.1** (Inégalité de Minkowski). *Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  des nombres réels. Alors, on a :*

$$\left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.12)$$

*Démonstration.* Posons

$$A = \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \quad B = \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2} \quad C = \left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} C^2 - A^2 B^2 &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 - \left[ \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2} \right] \\ &= 2 \left[ \sum_{k=1}^n a_k b_k - \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2} \right] \geq 0, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comme  $A, B$  et  $C$  sont des réels positifs, on en déduit l'inégalité (1.12).  $\square$

**Proposition 1.2.9.** *La moyenne géométrique  $M_g(a_1, \dots, a_n) := (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}$  de  $n$  réels positifs  $a_1, \dots, a_n$  est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique  $M_a(a_1, \dots, a_n) := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$  :*

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}. \quad (1.13)$$

Démontrons d'abord le lemme suivant :

**Lemme 3.** *Soient  $a_1, \dots, a_n$   $n$  réels positifs tels que  $\prod_{k=1}^n a_k = 1$ . Alors, on a :*

$$n \leq a_1 + \dots + a_n.$$

*Démonstration.* Le lemme est trivial pour  $n = 1$ . Supposons-le vrai pour  $n$ . Soient  $a_1, \dots, a_{n+1}$  des réels positifs tels que  $a_1 \cdots a_{n+1} = 1$ . Il existe alors deux indices  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$  tels que  $a_i \leq 1$  et  $a_j \geq 1$  (sinon, les  $a_k$  seraient soit tous  $< 1$  (et dans ce cas leur produit est  $< 1$ ), soit tous  $> 1$  (et dans ce cas leur produit est  $> 1$ ). Pour simplifier les notations, supposons que  $a_1 \leq 1$  et  $a_2 \geq 1$ . On a alors  $(a_1 - 1)(a_2 - 1) \leq 0$ , donc  $1 + a_1 a_2 \leq a_1 + a_2$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} &\geq 1 + a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \\ &\geq 1 + n, \end{aligned}$$

(d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à  $a_1 a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$  dont le produit est égal à 1). Donc le lemme est vrai, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Démontrons maintenant la proposition 1.2.9. Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels positifs. Si le produit  $a_1 \cdots a_n$  est nul, alors l'inégalité (1.13) est vérifiée. Supposons donc que  $a_1 \cdots a_n \neq 0$ , et posons

$$a'_k = \frac{a_k}{(a_1 \cdots a_n)^{1/n}}, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Les  $a'_k$  sont positifs et leur produit est égal à 1. D'après le lemme précédent, on a :

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{(\prod_{k=1}^n a_k)^{1/n}} = a'_1 + \cdots + a'_n \geq n \iff \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \geq \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n}.$$

□

### 1.3 La droite numérique achevée

Pour étudier ultérieurement les limites, on ajoute à  $\mathbb{R}$  deux objets, notés  $+\infty$  et  $-\infty$ . Notez que ces deux nouveaux éléments ne sont pas des nombres réels.

**Définition 1.3.1.** La droite numérique achevée  $\overline{\mathbb{R}}$  est l'ensemble obtenu par adjonction à  $\mathbb{R}$  de deux éléments, notés  $+\infty$  et  $-\infty$ , muni de la relation d'ordre total obtenue en prolongeant l'ordre de  $\mathbb{R}$  par les conditions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$$

Par définition,  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) est le plus grand (resp. le plus petit) élément de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Si  $A$  est une partie de  $\overline{\mathbb{R}}$ , alors on écrit :

- $\sup A = +\infty$  si  $A$  est non vide et non majoré.
- $\inf A = -\infty$  si  $A$  est non vide et non minoré.
- $\sup \emptyset = -\infty$  et  $\inf \emptyset = +\infty$ .

Avec ces conventions, on a :

**Proposition 1.3.1.** Toute partie de  $\overline{\mathbb{R}}$  admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Il n'est pas possible de définir  $+\infty + (-\infty)$  et  $0 \times (\pm\infty)$  de manière que  $\overline{\mathbb{R}}$  devienne un anneau ordonné. Cependant, on peut prolonger partiellement à  $\overline{\mathbb{R}}$  la structure algébrique de  $\mathbb{R}$  en posant :

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	$0$	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$xy$	$0$	$xy$	$-\infty$
$0$	ND	$0$	$0$	$0$	ND
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$xy$	$0$	$xy$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

Le symbole “ND” signifie que l’opération n’est pas définie.



# Chapitre 2

## Suites réelles

### 2.1 Généralités

**Définition 2.1.1.** Une suite réelle est une application  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à tout entier  $n \in \mathbb{N}$  un nombre réel  $u(n)$ , noté aussi  $u_n$ . On parle alors de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de terme général  $u_n$ , appelé aussi terme de rang  $n$  de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

Il arrive aussi que la suite soit définie sur une partie infinie  $I \subsetneq \mathbb{N}$ , et on parle dans ce cas de la suite  $(u_n)_{n \in I}$  indexée par  $I$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est :

- **constante** si  $u_n = u_0$ , pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .
- **stationnaire** s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n = u_k$  pour tout  $n \geq k$ .
- **croissante**, et on écrit  $(u_n)_{n \geq 0} \nearrow$ , si  $u_n \leq u_{n+1}$ , pour tout  $n$ .
- **décroissante**, et on écrit  $(u_n)_{n \geq 0} \searrow$ , si la suite  $(-u_n)_{n \geq 0}$  est croissante (ou encore si  $u_{n+1} \leq u_n$ , pour tout  $n$ ).
- **majorée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n \leq M$ , pour tout  $n$ .
- **minorée** s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $m \leq u_n$ , pour tout  $n$  (ou encore si  $(-u_n)_{n \geq 0}$  est majorée).
- **bornée** si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est à la fois majorée et minorée (ou encore s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|u_n| \leq M$ , pour tout  $n$ ).

**Définition 2.1.2** (Suites extraites). Une suite extraite (ou une sous-suite) de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle qu'il existe une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  **strictement croissante** telle que  $v_n = u_{\varphi(n)}$ , pour tout entier  $n$ .

Si on pose  $\varphi(k) = n_k$ , alors la sous-suite  $(u_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$  est notée également  $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ .

Le lemme suivant se démontre facilement par récurrence :

**Lemme 4.** Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante. Alors  $\varphi(n) \geq n$ , pour tout entier  $n$ .

## 2.2 Suites convergentes.

**Définition 2.2.1.** On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  a pour **limite** un réel  $l \in \mathbb{R}$  (ou encore que  $u_n$  **tend** (ou **converge**) vers  $l$ , lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Si c'est le cas, on dit que la suite est **convergente**. Une suite non convergente est dite **divergente**.

**Remarques 2.2.1.** L'entier  $N$  ci-dessus dépend de  $\varepsilon$  :  $N = N(\varepsilon)$ . Dans la pratique, il n'est pas nécessaire de trouver le plus petit entier  $N(\varepsilon)$  pour lequel la condition (2.1) est vérifiée. Il suffit d'en connaître un suffisamment grand.

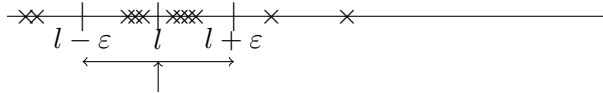


FIGURE 2.1 – tous les  $u_n$  sont dans  $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$  pour  $n \geq N$ .

**Proposition 2.2.1** (Unicité de la limite). Si une suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet une limite  $l$ , alors celle-ci est unique et on note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l.$$

$l$  est alors appelé la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde, que  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet deux limites différentes  $l$  et  $l'$ . Soit  $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{2} > 0$ . On peut trouver un entier  $N$  (resp.  $N'$ ) tel que, pour tout entier  $n \geq N$  (resp.  $n \geq N'$ ), on ait  $|u_n - l| < \varepsilon$  (resp.  $|u_n - l'| < \varepsilon$ ). On aurait alors, pour  $n \geq N'' = \max(N, N')$ ,  $|u_n - l| < \varepsilon$  et  $|u_n - l'| < \varepsilon$ . En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduirait que  $|l - l'| = |(u_n - l) - (u_n - l')| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = |l - l'|$ . Contradiction.  $\square$

**Exemples 2.2.1.** 1. Une suite stationnaire (ou constante) est convergente. En effet, s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que  $u_n = c$ , pour tout  $n \geq p$ , alors  $(u_n)$  converge vers  $c$ .

2. La suite  $(1/n)$  converge vers 0. En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N > 1/\varepsilon$  (propriété d'Archimède). On en déduit que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|1/n - 0| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$ .

### 2.2.1 Limites infinies.

**Définition 2.2.2.** — On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (ou encore que  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet  $+\infty$  pour limite) si, et seulement si,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A \quad (2.2)$$

On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

- On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (ou encore que  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet  $-\infty$  pour limite) si, et seulement si, :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A. \quad (2.3)$$

On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

### Caractère asymptotique de la limite.

**Proposition 2.2.2.** *Si deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  coïncident à partir d'un certain rang (c-a-d s'il existe un rang  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_n = v_n$ ), alors elles sont de même nature (c-a-d qu'elles convergent en même temps ou divergent en même temps), et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$ .*

Ce résultat, qui découle directement des définitions, exprime *le caractère asymptotique* de la notion de limite : on peut changer un nombre fini de termes d'une suite sans altérer ni sa nature (convergente ou divergente) ni sa limite éventuelle. C'est pourquoi la plupart des résultats qui vont suivre concerneront des suites ayant des propriétés vraies à partir d'un certain rang.

**Remarque 2.2.1.** *En utilisant le lemme 4, on démontre facilement que si une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet une limite  $l$  (finie ou non), alors toute sous-suite de  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet la même limite  $l$ . Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite. Il suffit de trouver deux sous-suites de  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui admettent deux limites différentes. Ainsi la suite définie par  $u_n = (-1)^n$  n'a pas limite car ses deux suites extraites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  convergent vers deux limites distinctes.*

**Exemple 2.2.1.** *Étudions la suite  $(u_n(x))$ , où  $u_n(x) = x^n$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ).*

**si  $x = 1$  :** alors  $x^n = 1$ , pour tout  $n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$ .

**Si  $x > 1$  :** on écrit  $x = 1 + h$ , avec  $h > 0$ . D'après l'inégalité de Bernoulli, on a  $x^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$ . Donc, pour tout réel  $A$ , on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $Nh > A - 1$  (propriété d'Archimède). On a alors, pour  $n \geq N$ ,  $x^n \geq 1 + nh \geq 1 + Nh > A$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$  et la suite  $(u_n(x))$  est divergente.

**Si  $x \leq -1$  :** , les deux sous-suites  $(u_{2n}(x))$  et  $(u_{2n+1}(x))$  ont des limites différentes (resp  $\pm 1$  si  $x = -1$  et  $\pm \infty$  si  $x < -1$ ), donc la suite  $(u_n(x))$  est divergente.

**si  $|x| < 1$  :** on écrit  $|x| = 1/(1 + h)$ , avec  $h > 0$ . On utilise l'inégalité de Bernoulli, pour obtenir  $|x|^n = 1/(1 + h)^n \leq 1/(1 + nh) \leq 1/nh$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ .

**Lemme 5.** *Toute suite réelle convergente est bornée.*

*Démonstration.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite convergente de limite  $x$ . On peut associer à  $\varepsilon = 1$ , un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $|u_n - x| < 1$ , pour tout  $n \geq N$ . On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| \leq M$ , où  $M = \max(|x| + 1, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|)$ .  $\square$

## 2.2.2 Opérations sur les limites

On étudie certaines suites en les décomposant en somme, produit ou quotient. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.2.1.** Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles convergentes de limites respectives  $l$  et  $l'$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a alors :

- (i)  $(\lambda u_n + v_n)_{n \geq 0}$  est convergente et sa limite est égale à  $\lambda l + l'$ .
- (ii)  $(u_n \cdot v_n)_{n \geq 0}$  est convergente et sa limite est égale à  $l \cdot l'$ .
- (iii) Si  $l' \neq 0$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(u_n/v_n)_{n \geq n_0}$  soit définie, et converge vers  $l/l'$ .

*Démonstration.* La proposition (i) découle de la majoration suivante :

$$|(\lambda u_n + v_n) - (\lambda l + l')| \leq |\lambda| |u_n - l| + |v_n - l'|.$$

(ii) D'après le lemme 5, la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bornée. Soit  $M = \sup_{n \geq 0} |u_n|$ . L'assertion (ii) découle maintenant de la majoration suivante :

$$|u_n \cdot v_n - l \cdot l'| = |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \leq M |v_n - l'| + |l'| \cdot |u_n - l|.$$

(iii) Posons  $\varepsilon = |l'|/2 > 0$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|v_n - l'| \leq \varepsilon$ . Or  $||v_n| - |l'|| \leq |v_n - l'| \leq \varepsilon$ , donc  $|v_n| \geq |l'| - \varepsilon = |l'|/2 > 0$ . Par suite  $v_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq n_0$ .

D'autre part

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| = \frac{|v_n - l'|}{|v_n| \cdot |l'|} \leq \frac{2|v_n - l'|}{|l'|^2}.$$

On en déduit que  $(1/v_n)_{n \geq n_0}$  converge vers  $1/l'$ , et en utilisant (ii), que  $(u_n/v_n)_{n \geq n_0}$  converge vers  $l/l'$ .  $\square$

**Théorème 2.2.2.** Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles.

- (i) si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) et si  $(v_n)_{n \geq 0}$  est bornée, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
- (ii) si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ), alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
- (iii) si  $u_n \rightarrow +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) et si  $v_n \geq k > 0$ , à partir d'un certain rang, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
- (iv) si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/u_n = 0$ .

Dans le cas des limites infinies, il faut faire attention aux formes indéterminées :

- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ , on ne peut rien dire, en général, de  $u_n + v_n$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , on ne peut rien dire, en général, de  $u_n v_n$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \pm\infty$ , on ne peut rien dire, en général, de  $\frac{u_n}{v_n}$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , on ne peut rien dire, en général, de  $\frac{u_n}{v_n}$ .

## 2.3 Outils pour étudier les suites

### 2.3.1 Limites et monotonie

**Proposition 2.3.1.** 1. Toute suite réelle croissante et majorée est convergente vers sa borne supérieure.

2. Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.

*Démonstration.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante et majorée et soit  $\varepsilon > 0$ . L'ensemble  $U = \{u_n/n \in \mathbb{N}\}$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ , donc elle admet une borne supérieure  $l = \sup U$ . Par définition de  $l$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $l - \varepsilon < u_{n_0}$ . Comme  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante, on aurait :  $\forall n \geq n_0, l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq l < l + \varepsilon$ . Donc  $u_n \rightarrow l$ . Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et minorée, on applique ce qui précède à la suite  $(-u_n)_{n \geq 0}$  qui est croissante et majorée.  $\square$

**Théorème 2.3.1** (Théorème de la limite monotone). Toute suite réelle monotone  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Plus précisément, si  $(u_n)_{n \geq 0} \nearrow$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_{n \geq 0} u_n$ ; et si

$(u_n)_{n \geq 0} \searrow$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf_{n \geq 0} u_n$ .

*Démonstration.* Supposons, par exemple, que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante (si  $(u_n)_{n \geq 0} \searrow$ , on considérerait la suite  $(-u_n)_{n \geq 0}$ ). Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est majorée, alors, d'après la proposition 2.3.1,  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_{n \geq 0} u_n$ . Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'est pas majorée, alors pour tout réel  $A$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > A$ . Comme  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante, on aurait  $u_n \geq u_{n_0} > A$ , pour tout  $n \geq n_0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty = \sup_{n \geq 0} u_n$ .  $\square$

**Exemple 2.3.1.** Etudions la suite  $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ , où  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = 0$ . Supposons, dans la suite, que  $x \neq 0$ . On a :

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|}{n+1}.$$

Donc, pour tout  $n > |x|$ , on a  $\frac{|x|}{n+1} < 1$  et  $|u_{n+1}(x)| < |u_n(x)|$ . Donc la suite  $(|u_n(x)|)$  est décroissante à partir d'un certain rang. Comme elle est minorée (par 0), elle est convergente.

Soit  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)|$ . On a  $|u_{n+1}(x)| = |u_n(x)| \times \frac{|x|}{n+1}$ . En passant à la limite, on obtient  $l = l \times 0 = 0$ . Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.}$$

### Suites adjacentes

**Théorème et définition 2.3.1.** Deux suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont dites **adjacentes** si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante et  $(v_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$ .

Dans ce cas on a :

(i)  $u_n \leq v_n$ , pour tout entier  $n$ .

(ii)  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  convergent vers la même limite.

*Démonstration.* Posons  $w_n = v_n - u_n$ . On a

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0,$$

donc  $(w_n)_{n \geq 0} \searrow$ . Comme  $w_n \rightarrow 0$ , alors  $0 = \inf_{n \geq 0} w_n$  et par suite  $w_n \geq 0$ , pour tout  $n$ . D'où (i).

Par ailleurs on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ . Donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante et majorée, et  $(v_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et minorée. Donc ces deux suites sont convergentes, et leurs limites coïncident, car  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .  $\square$

### **Théorème des segments emboîtés.**

On déduit du résultat précédent une propriété importante de  $\mathbb{R}$  :

**Théorème 2.3.2** (Propriété des segments emboîtés). *Soient  $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$  une suite décroissante de segments de  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ . Alors l'intersection  $I = \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n]$  est réduite à un point.*

*Démonstration.* L'inclusion  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  entraîne  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Donc  $(a_n)_{n \geq 0}$  est croissante et  $(b_n)_{n \geq 0}$  est décroissante. Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont alors adjacentes, et convergent vers une limite commune  $l$ . On a, pour tout entier  $n$ ,  $a_n \leq l \leq b_n$ , donc  $l \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n] = I$ . Inversement, si  $x \in I$ , alors  $a_n \leq x \leq b_n$ , pour tout  $n$ . En passant à la limite, on obtient  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ . Donc  $x = l$  et  $I = \{l\}$ .  $\square$

**Remarque 2.3.1.** *Si  $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$  est une suite décroissante de segments, alors l'intersection  $I = \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n]$  est un segment. En effet,  $(a_n)$  est croissante et majorée (par  $b_0$ ) et  $(b_n)$  est décroissante et minorée (par  $a_0$ ). Donc les limites  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  et  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  existent. Si  $x \in I$ , alors  $a_n \leq x \leq b_n$ , pour tout  $n$ . Par passage à la limite, on obtient  $a \leq x \leq b$ . Donc  $I \subset [a, b]$ . Inversement, si  $x \in [a, b]$ , alors  $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq x \leq b = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$ , donc  $a_n \leq x \leq b_n$ , pour tout  $n$ . Donc  $x \in I$ ,  $[a, b] \subset I$  et  $I = [a, b]$ .*

### **Approximation décimale d'un nombre réel**

**Proposition 2.3.2.** *Soient  $x$  et soient*

$$u_n = 10^{-n}E(10^n x) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 10^{-n}$$

*les valeurs approchées de  $x$  à  $10^{-n}$  près, respectivement par défaut et par excès. Alors les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites adjacentes, et on a :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x < v_n) \quad \text{et} \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = x \right).$$

*Démonstration.* Par définition de la partie entière, on a :

$$E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1 \quad (2.4)$$

$$E(10^{n+1} x) \leq 10^{n+1} x < E(10^{n+1} x) + 1 \quad (2.5)$$

En multipliant la relation 2.4 par  $10^{-n}$ , on obtient  $u_n \leq x < v_n$ . En la multipliant par 10, on obtient :  $10E(10^n x) \leq 10^{n+1} x < 10E(10^n x) + 10$ . En tenant compte de la relation 2.5, on obtient  $\underbrace{10E(10^n x)}_{n \in \mathbb{Z}} < \underbrace{E(10^{n+1} x) + 1}_{n \in \mathbb{Z}}$ , donc  $10E(10^n x) \leq E(10^{n+1} x)$  et par suite

$$u_n \leq u_{n+1}. \text{ De même, } \underbrace{E(10^{n+1} x)}_{n \in \mathbb{Z}} < \underbrace{10E(10^n x) + 10}_{n \in \mathbb{Z}} \Rightarrow E(10^{n+1} x) + 1 \leq 10E(10^n x) + 10,$$

donc  $v_{n+1} \leq v_n$ . Comme  $v_n - u_n = 10^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. D'autre part,  $u_n \leq x < v_n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = x$ .  $\square$

### 2.3.2 Limites et relation d'ordre

**Proposition 2.3.3** (Propriété des gendarmes). *Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  et  $(c_n)_{n \geq 0}$  trois suites réelles telles que  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(c_n)_{n \geq 0}$  convergent vers la même limite  $l$  et telles que*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$$

*Alors  $(b_n)_{n \geq 0}$  est convergente et sa limite est égale à  $l$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la définition de la limite et l'inégalité :

$$\forall n \geq n_0, |b_n - l| \leq \max(|a_n - l|, |c_n - l|) \leq |a_n - l| + |c_n - l|,$$

pour obtenir le résultat.  $\square$

**Corollaire 2.3.1.** *Soit  $(u_n)$  une suite réelle de limite nulle, et soit  $(v_n)$  une suite bornée. Alors  $(u_n v_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 0$ .*

*Démonstration.* En effet, on a  $0 \leq |u_n v_n| \leq M |u_n|$ , où  $M = \sup_{n \geq 0} |v_n| < +\infty$ . Le résultat découle alors de la proposition 2.3.3.  $\square$

**Exemple 2.3.2.** *Etudions la suite  $u_n = \frac{\sin(n^2 + 2^n)}{n}$ . On a  $|\sin(n^2 + 2^n)| \leq 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , et par suite  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .*

En utilisant la définition d'une limite infinie, on peut démontrer facilement la

**Proposition 2.3.4.** *Si, à partir d'un certain rang, on a  $a_n \leq b_n$ . Alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

**Proposition 2.3.5.** *Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles convergentes de limites respectives  $l$  et  $l'$ .*

(i) *Si  $l < l'$ , alors  $u_n < v_n$ , à partir d'un certain rang.*

(ii) Si, à partir d'un certain rang, on a  $u_n < v_n$ , alors  $l \leq l'$  (attention, on peut avoir  $l = l'$ ).

*Démonstration.* Posons  $w_n = v_n - u_n$  et  $l'' = l' - l$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l''$ , on peut associer au réel  $\varepsilon = l''/2 > 0$ , un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on ait  $-\varepsilon < w_n - l'' < +\varepsilon$ , donc  $v_n - u_n = w_n > l'' - \varepsilon = l''/2 > 0$ , pour  $n \geq N$ . D'où la proposition (i).

Inversement si, à partir d'un certain rang  $N$ , on a  $u_n < v_n$  et si on suppose que  $l'' = l' - l < 0$ , alors à  $\varepsilon = -l''/2 > 0$ , on peut associer un entier  $N' > N$  tel que  $-\varepsilon < w_n - l'' < \varepsilon$ , pour tout  $n \geq N'$ . On aurait alors  $v_n - u_n = w_n < l'' + \varepsilon = l''/2 < 0$ , pour  $n > N'$ . Contrairement à l'hypothèse faite sur  $u_n$  et  $v_n$ . D'où la proposition (ii).  $\square$

**Remarque 2.3.2.** En passant à la limite dans une inégalité stricte, on peut obtenir une égalité. Ainsi, on a  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ , pour tout  $n \geq 1$ , mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

### 2.3.3 Suites de Cauchy

**Définition 2.3.1** (Suites de Cauchy). On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy (ou vérifie le critère de Cauchy) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |u_n - u_m| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

**Proposition 2.3.6.** Toute suite de Cauchy est bornée.

*Démonstration.* En effet, si  $(u_n)_{n \geq 0}$  vérifie la condition (2.6), alors pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n - u_N| < \varepsilon$  donc  $|u_n| < \varepsilon + |u_N|$ . On en déduit que, pour tout entier  $n$ ,  $|u_n| \leq M$  où  $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, \varepsilon + |u_N|)$ .  $\square$

**Théorème 2.3.3** (critère de Cauchy). Une suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente si et seulement si, elle est de Cauchy. On exprime ce résultat en disant que  $\mathbb{R}$  est **complet**.

*Démonstration.* Montrons que la condition est nécessaire. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite convergente de limite  $l$ , et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $|u_n - l| < \varepsilon/2$ , pour tout  $n \geq N$ . On en déduit que pour  $m, n \geq N$ , on a :

$$|u_n - u_m| = |(u_n - l) - (u_m - l)| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy.

Montrons que la condition est suffisante. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy. On sait qu'une telle suite est bornée (cf. proposition 2.3.6). Donc les réels suivants sont bien définis :

$$v_n = \inf U_n \quad \text{et} \quad w_n = \sup U_n,$$

où  $U_n = \{u_p/p \geq n\}$ . De l'inclusion  $U_{n+1} \subset U_n$ , on déduit que  $(v_n)_{n \geq 0} \nearrow$  et que  $(w_n)_{n \geq 0} \searrow$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $N$  l'entier qui lui est associé par (2.6). Soit  $n \geq N$ . Par définition de  $v_n$ , il existe  $p \geq n \geq N$ , tel que  $v_n \leq u_p < v_n + \varepsilon$ . De même, il existe  $q \geq n \geq N$  tel que  $w_n - \varepsilon < u_q \leq w_n$ . Donc

$$\forall n \geq N, 0 \leq w_n - v_n \leq (w_n - u_q) + (u_q - u_p) + (u_p - v_n) \leq 3\varepsilon.$$

Donc  $w_n - v_n \rightarrow 0$  et les suites  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  sont adjacentes : soit  $l$  leur limite commune. Comme on a, pour tout entier  $n$ ,  $v_n \leq u_n \leq w_n$ , il en résulte, d'après la propriété 2.3.3, que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente vers  $l$ .  $\square$



**Remarques 2.3.1.** 1. Le théorème précédent est très important, puisqu'il fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite numérique converge, sans faire intervenir la limite.

2.  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet. En effet, puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , on peut trouver, pour tout  $n \geq 1$ , un nombre rationnel  $r_n$  compris entre  $\sqrt{2} - 1/n$  et  $\sqrt{2} + 1/n$ . On a  $|r_n - \sqrt{2}| < 1/n$ , donc  $(r_n)_{n \geq 0}$  est une suite de rationnels qui converge vers  $\sqrt{2}$ . En tant que suite convergente dans  $\mathbb{R}$ ,  $(r_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ , donc c'est aussi une suite de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$ . Mais  $(r_n)_{n \geq 0}$  n'est pas convergente dans  $\mathbb{Q}$ .
3. Le critère de Cauchy est le plus souvent utilisé dans des exercices à caractère théorique.

**Exemple 2.3.3.** Soit  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . On a :

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc la suite  $(u_n)$  ne vérifie pas le critère de Cauchy. Donc elle est divergente. Comme  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$ , la suite  $(u_n)$  est croissante, et admet une limite (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ). Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

### 2.3.4 Suites équivalentes

**Définition 2.3.2** (Suites équivalentes). On dit que  $(v_n)_{n \geq 0}$  est équivalente à  $(u_n)_{n \geq 0}$ , et on note  $v_n \sim u_n$ , s'il existe une suite de scalaires  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  de limite 1 et telle que pour  $n$  assez grand, on ait  $v_n = \lambda_n u_n$ . Si  $u_n \neq 0$ , pour  $n$  assez grand, il revient au même de dire que  $\lambda_n = v_n/u_n \rightarrow 1$ .

Par exemple, on a :  $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ ;  $\log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ ;  $\log n \sim \log(n+1)$ ;  $\cos n \cos(\frac{1}{n}) \sim \cos n$ .

Les « équivalents » sont utiles pour le calcul des limites et pour l'étude du signe d'une suite pour les grandes valeurs de la variable :

**Proposition 2.3.7.** 1. La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

2. Si la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet une limite (finie ou non), toute suite qui lui est équivalente admet la même limite.
3. Réciproquement si deux suites ont la même limite, et si cette limite est finie non nulle, alors ces deux suites sont équivalentes.
4. Si deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont équivalentes, alors elles ont le même signe, pour  $n$  assez grand.

*Démonstration.* Immédiate d'après la définition et les opérations sur les limites.  $\square$

**Théorème 2.3.4.** *On ne modifie ni la convergence ni la limite d'un produit ou d'un quotient de suites, en remplaçant chacune des suites qui y figurent, par une suite équivalente.*

**Remarque 2.3.3.** *Ce théorème ne s'applique ni aux sommes ni aux différences des suites :*

$$n \sim n + 1, \text{ mais } n - (n + 1) \not\sim 0.$$

### 2.3.5 Suites récurrentes

Soient  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in D$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . On se propose d'étudier les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  définies par la donnée du premier terme  $u_0$  et par une relation de récurrence simple<sup>1</sup> :  $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $f(D) \subset D$  pour que  $(u_n)_{n \geq 0}$  soit bien définie.

Théoriquement, on peut calculer par **itération** (ie. de proche en proche)  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $u_0$ . On commence par calculer  $u_1 = f(u_0)$ , puis on calcule  $u_2 = f(u_1)$ , et ainsi de suite. Mais, dans la pratique, il est rare que l'on puisse exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  (même pour des fonctions  $f$  très simples).

**Cas où on peut exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $u_0$ .**

**Suites arithmétiques** :  $u_{n+1} = u_n + r$ , où  $r$  est une constante ( $r$  s'appelle la raison de la suite). Dans ce cas, on a  $u_n = u_0 + nr$ .

**Suites géométriques** :  $u_{n+1} = ru_n$ , où  $r$  est une constante ( $r$  s'appelle la raison de la suite). Dans ce cas, on a  $u_n = r^n u_0$ .

**Suites données par une récurrence affine** :  $u_{n+1} = au_n + b$ , où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On écarte les cas  $a = 1$  ou  $b = 0$  qui correspondent respectivement à une suite arithmétique ou à une suite géométrique. On pose  $v_n = u_{n+1} - u_n$ . On a alors  $v_n = av_{n-1}, \forall n \geq 1$ .  $(v_n)_{n \geq 1}$  est géométrique. Donc  $v_n = a^n v_0$ . On ajoute terme à terme les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= a^n v_0 \\ u_n - u_{n-1} &= a^{n-1} v_0 \\ &\vdots \\ u_1 - u_0 &= a^0 v_0, \end{aligned}$$

on obtient  $u_{n+1} - u_0 = (1 + a + \dots + a^n)v_0 = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}((a - 1)u_0 + b)$ . Donc

$$u_{n+1} = a^{n+1}u_0 + \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}b.$$

**Suites définies par une récurrence homographique :**

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

---

1. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Une suite  $(u_n)$  est définie par une récurrence d'ordre  $p$  s'elle est définie par la donnée de  $u_0, \dots, u_{p-1}$  et par une relation de la forme

$$u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}),$$

où  $f$  est une fonction de  $p$  variables.

Où  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ , où  $c(ad - bc) \neq 0$  (si  $c = 0$ , la récurrence est affine et si  $ad - bc = 0$ , la fonction  $f$  est constante). On suppose que  $u_0$  est choisi de telle façon que  $u_n$  soit toujours défini.

— si  $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$  : Soient  $\alpha, \beta$  les racines (complexes) de l'équation  $f(x) = x$ .

On a alors

$$\frac{f(z) - \alpha}{f(z) - \beta} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \forall z \in D_f \setminus \{\beta\}$$

Où  $D_f$  est le domaine de définition de  $f$  et  $k = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$  est une constante. On en déduit que

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{f(u_n) - \alpha}{f(u_n) - \beta} = k \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta},$$

et que la suite  $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$  est une suite géométrique de raison  $k$ . Donc  $v_n = k^n v_0$ , et on en déduit l'expression de  $u_n$  ainsi que sa limite s'elle existe.

— si  $(a - d)^2 + 4bc = 0$  : Soit  $\alpha$  la racine double de l'équation  $f(x) = x$  ( $\alpha = (a - d)/2c$ ). On a alors

$$\frac{1}{f(z) - \alpha} = k + \frac{1}{z - \alpha}, \forall z \in D_f \setminus \{\alpha\}$$

Où  $k = 2c/(a + d)$ . On en déduit que

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{f(u_n) - \alpha} = \frac{1}{u_n - \alpha} + k,$$

et que la suite  $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$  est une suite arithmétique de raison  $k$ . Donc  $v_n = nk + v_0$ , et on en déduit l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $u_0$ , ainsi que sa limite s'elle existe.

### Cas général.

La théorie générale ayant pour objet l'étude du comportement de la suite  $(u_n)$  en fonction du terme initial  $u_0$  s'appelle la **théorie des systèmes dynamiques discrets**. Nous nous contenterons de donner quelques propriétés simples permettant d'étudier quelques exemples bien choisis.

**Proposition 2.3.8.** **Si  $f$  est croissante** : alors la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est monotone (croissante si  $f(u_0) - u_0 > 0$ , décroissante si  $f(u_0) - u_0 < 0$  et constante si  $f(u_0) = u_0$ ).

**Si  $f$  est décroissante** : alors les suites  $(u_{2n})_{n \geq 0}$  et  $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$  sont monotones et varient en sens inverse l'une de l'autre.

*Démonstration.* On observe que  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ , pour  $n \geq 1$ .

**Si  $f \nearrow$**  : Donc le signe de  $u_{n+1} - u_n$  est égal au signe de  $u_n - u_{n-1}$ , donc il est indépendant de  $n$  et est égal au signe de  $u_1 - u_0$ . On en déduit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante (resp. décroissante, resp. constante) selon que  $u_1 > u_0$  (resp.  $u_1 < u_0$ , resp.  $u_1 = u_0$ ).

**Si  $f \searrow$  :** Alors  $u_{n+1} - u_n$  est alternativement positif ou négatif (on dit que la suite est oscillante). On pose

$$g = f \circ f, \quad v_n = u_{2n}, \quad z_n = u_{2n+1}.$$

On a, pour tout entier  $n$  :

$$v_{n+1} = g(v_n), \quad z_{n+1} = g(z_n).$$

Comme  $g \nearrow$ , les suites  $(v_n)$  et  $(z_n)$  sont monotones (d'après le premier cas). Comme  $z_n = f(v_n)$  et que  $f$  est décroissante,  $(v_n)$  et  $(z_n)$  varient en sens inverse l'une de l'autre.

□

En ce qui concerne la convergence de la suite  $((u_n)_{n \geq 0})$ , on démontrera ultérieurement le résultat suivant :

**Proposition 2.3.9.** *Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet une limite  $l \in D$  et si  $f$  est continue en  $l$ , alors  $f(l) = l$  (on dit que  $l$  est un **point fixe** de  $f$ ).*

Donc si  $f$  est continue et l'équation  $f(x) = x$  n'a pas de solutions dans  $D$ , alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  est divergente. Si par contre cette équation admet plusieurs racines dans  $D$ , le problème revient à examiner si  $(u_n)_{n \geq 0}$  admet l'une de ces racines comme limite. En pratique, on commence par chercher les **points fixes** de  $f$  (ie. on résoud l'équation  $f(x) = x$ ). Cette résolution facilite la recherche de majorants et de minorants pour la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ . Le graphe de  $f$  peut être utilisé comme source de renseignement sur le comportement de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Exemple 2.3.4.** *A titre d'exemple, étudions la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par la donnée des deux nombres  $a > 0$  et  $u_0 > 0$  et par la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a^2}{u_n} \right).$$

Observons d'abord que  $u_n$  est défini pour tout entier  $n$ , et que  $u_n > 0$ . Une limite éventuelle de la suite doit vérifier  $l = \frac{1}{2} \left( l + \frac{a^2}{l} \right) \iff l^2 = a^2 \iff l = \pm a$ . Comme  $u_n$  est toujours positif, on a  $l = a$ . Nous sommes ainsi conduits à comparer  $u_n$  et  $a$  :  $u_{n+1} - a = \frac{(u_n - a)^2}{2u_n}$ . Donc  $u_n \geq a$ , pour tout  $n \geq 1$ . D'autre part  $u_{n+1} - u_n = \frac{a^2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$ . Donc la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et minorée (par  $a$ ). En fin de compte, elle est convergente et sa limite est  $a$ .

On peut remarquer la formule suivante

$$\frac{u_{n+1} - a}{u_{n+1} + a} = \left( \frac{u_n - a}{u_n + a} \right)^2$$

D'où l'on déduit l'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_n$  et  $u_0$  :

$$\frac{u_n - a}{u_n + a} = \left( \frac{u_0 - a}{u_0 + a} \right)^{2^n} \Rightarrow u_n = a \frac{1 - \left( \frac{u_0 - a}{u_0 + a} \right)^{2^n}}{1 + \left( \frac{u_0 - a}{u_0 + a} \right)^{2^n}}.$$

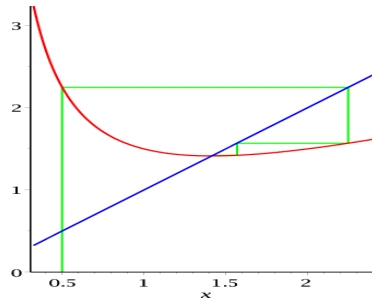


FIGURE 2.2 – La suite définie par  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ ,  $u_0 = 0.5$  converge vers  $\sqrt{2}$ .

### 2.3.6 Valeurs d'adhérence et Théorème de Bolzano-Weierstrass

**Définition 2.3.3.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle et soit  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $l$  est une **valeur d'adhérence** de  $(u_n)_{n \geq 0}$  s'il existe une suite extraite de  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui a pour limite  $l$ .

**Exemples 2.3.1.** 1. Si une suite admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $l$  est l'unique valeur d'adhérence de  $(u_n)$  (donc, par contraposée, une suite qui admet plusieurs valeurs d'adhérence n'admet pas de limite).

2. La suite  $u_n = (-1)^n$  admet deux valeurs d'adhérence, à savoir  $\pm 1$ . En effet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = -1.$$

Donc  $\pm 1$  sont deux valeurs d'adhérence de  $(u_n)$ . Si  $l$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ , alors il existe une suite extraite  $(u_{\varphi(n)})$  de  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui a pour limite  $l$ .

Puisque,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = l$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{\varphi(n)}| = 1 = |l|$ . Donc  $l = \pm 1$ .

3. La suite  $u_n = n \sin \left( \frac{n\pi}{4} \right)$  admet  $0$  et  $\pm \infty$  comme valeurs d'adhérence, car  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{4n}$ ,  $+\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{8n+1}$  et  $-\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{8n+3}$ .

Le théorème suivant est très important, par ses conséquences et par ses nombreuses généralisations, dont la plus importante est la notion topologique de *compacité*.

**Théorème 2.3.5** (de Bolzano-Weierstrass). Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

*Démonstration.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle bornée : il existe  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  tels que  $a \leq u_n \leq b$ , pour tout entier  $n$ . Posons  $I_0 = [a, b] = [a_0, b_0]$ . On a  $I_0 = [a_0, (a_0 + b_0)/2] \cup [(a_0 + b_0)/2, b_0]$ . Désignons par  $I_1 = [a_1, b_1]$  celui de ces « deux moitiés » qui contient une infinité de termes de la suite (si les deux sous-intervalles contiennent tous les deux une infinité de termes de la suite, on prend  $a_1 = a_0, b_1 = (a_0 + b_0)/2$ ). Comme l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} / u_n \in I_1\}$  est infini, il existe  $n_1 \geq 1$  tel que  $u_{n_1} \in I_1$ . Procédons de même avec  $I_1$  : On obtiendra un sous-intervalle  $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1, b_2 - a_2 = (b - a)/2^2$ , un entier  $n_2 > n_1$  tel que  $u_{n_2} \in I_2$ . Ce procédé peut être répété indéfiniment : on peut donc construire une suite décroissante  $(I_k)_{k \geq 0}$  de segments emboîtés ( $I_k = [a_k, b_k]$  de longueur  $l(I_k) = (b - a)/2^k$ ) et une suite strictement croissante  $(n_k)_{k \geq 0}$  d'entiers telles que  $u_{n_k} \in I_k$ , pour tout

$k \in \mathbb{N}$ . Les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 0}$  sont adjacentes : soit  $x$  leur limite commune. Comme  $a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$ , il en résulte que la suite  $(u_{n_k})_{k \geq 0}$  converge vers  $x$ .  $\square$

**Remarque 2.3.4.** 1. On peut reformuler le théorème 2.3.5 de Bolzano-Weierstrass, en disant que toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

2. On peut encore dire que toute suite réelle  $(u_n)$  (bornée ou non) admet une valeur d'adhérence dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . En effet, d'après le théorème 2.3.5, il suffit de traiter le cas où  $(u_n)$  est non bornée. Supposons, par exemple, que  $(u_n)$  est non majorée. Alors il existe un indice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > 0$  (car 0 ne majore pas la suite  $(u_n)$ ). De même, on peut trouver un indice  $n_1 > n_0$  tel que  $u_{n_1} > 1$  (car 1 ne majore pas la suite). De proche en proche, on construirait une suite strictement croissante d'entiers  $n_k$  telle que  $u_{n_k} > k$ , pour tout  $k$ . Ainsi, on aurait construit une suite extraite  $(u_{n_k})_k$  qui admet  $+\infty$  pour limite. On en déduirait que  $+\infty$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ .

Si  $(u_n)$  est non minorée, on démontrerait de même que  $-\infty$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ .



# Chapitre 3

## Limites et Continuité d'une fonction

### 3.1 Limite ponctuelle d'une fonction.

#### 3.1.1 Voisinages d'un point, Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.1.1.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On dit qu'une partie  $V \subset \mathbb{R}$  est un **voisinage** de  $x_0$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $V \supset ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ .

On dit qu'une partie  $V \subset \mathbb{R}^1$  est un **voisinage** de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) s'il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $[A, +\infty[ \subset V$  (resp.  $] -\infty, A] \subset V$ ).

L'ensemble des voisinages de  $x_0$  est noté par  $\mathcal{V}(x_0)$ .

Une propriété  $P(x)$  est dite **vraie au voisinage de**  $x_0$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que  $P(x)$  soit vraie pour tout  $x \in V$ .

**Définition 3.1.2.** Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $x_0$  est **adhérent** à  $D$  si  $D$  rencontre tout voisinage de  $x_0$  :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0), V \cap D \neq \emptyset.$$

**Proposition 3.1.1** (Caractérisation des points adhérents). Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)  $x_0$  est adhérent à  $D$ .

(ii) Il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ .

*Démonstration.* **1<sup>er</sup> cas si**  $x_0 \in \mathbb{R}$  : si  $x_0$  est adhérent à  $D$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u \in D$  tel que  $u \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ . En donnant à  $\varepsilon$  les valeurs  $\frac{1}{n}$ , on construirait une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  telle que  $|u_n - x_0| < \frac{1}{n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il est clair que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ .

---

1. Pour des raisons de commodité, nous commettons ici un léger abus de langage. En topologie, un voisinage d'un point contient nécessairement ce point. Il serait plus juste de considérer des voisinages de  $+\infty$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , et de supposer  $V \subset \overline{\mathbb{R}}$  et  $[A, +\infty] \subset V$  pour un voisinage de  $+\infty$ .

Inversement, supposons que  $x_0$  est la limite d'une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$ . Alors il existe un rang  $N$  tel que  $|u_n - x_0| < \varepsilon$ , pour tout  $n \geq N$ . Par construction  $u_N \in D \cap ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ . Donc  $x_0$  est adhérent à  $D$ .

**2<sup>e</sup> cas si  $x_0 = +\infty$**  : si  $+\infty$  est adhérent à  $D$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $u_n \in D \cap ]n, +\infty[$ . Il est clair que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

Inversement, supposons que  $+\infty$  est la limite d'une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$ . Par définition de la limite, pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \geq A$ , pour tout  $n \geq N$ . En particulier  $D \cap [A, +\infty[ \neq \emptyset$ .

**3<sup>e</sup> cas si  $x_0 = -\infty$**  : se fait de manière analogue que le cas précédent. □

**Exemples 3.1.1.** 1. Les points  $x_0 \in D$  sont évidemment adhérents à  $D$ .

2. Si  $D$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , alors  $\sup D$  et  $\inf D$  sont adhérents à  $D$ .

3. Tout réel est adhérent à  $\mathbb{Q}$  et à  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Définition 3.1.3.** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un ensemble  $D \subset \mathbb{R}$  et soit  $x_0$  un réel adhérent à  $D$ . On dit que  $f$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  en  $x_0$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x \in D, (|x - x_0| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon). \quad (3.1)$$

Ou encore :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(x_0), f(U \cap D) \subset V. \quad (3.2)$$

**Proposition 3.1.2** (Unicité de la limite). Si  $f$  admet une limite  $l$  en  $x_0$ , alors elle est unique. On parle alors de **la limite de  $f$  en  $x_0$** , et on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l.$$

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde, que  $f$  admet en  $x_0$  deux limites distinctes  $l \neq l'$ . En appliquant la définition 3.1 pour  $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{3} > 0$ , on aurait :

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| \leq \delta) &\Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon) \\ &\text{et} \\ \exists \delta' > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| \leq \delta') &\Rightarrow (|f(x) - l'| \leq \varepsilon) \end{aligned}$$

Posons  $\delta'' = \min(\delta, \delta') > 0$ . On aurait alors :

$$\forall x \in D, (|x - x_0| \leq \delta'') \Rightarrow \left( |l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3} |l - l'| \right)$$

ce qui absurde. □



### 3.1.2 Limites par valeurs différentes, limites à droite et limites à gauche

La définition précédente de la limite admet de nombreuses variantes. Nous allons en indiquer quelques-unes.

**Définition 3.1.4.** 1. On suppose que  $x_0$  est adhérent à  $D \setminus \{x_0\}$ . On dit que  $f$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  **par valeurs distinctes** en  $x_0$ , ce que l'on note par  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f(x) = l$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x \in D, (0 < |x - x_0| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon). \quad (3.3)$$

2. On suppose que  $x_0$  est adhérent à  $D \cap ]x_0, +\infty[$ . On dit que  $f$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  **à droite** en  $x_0$ , ce que l'on note par  $\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x \in D, (x_0 < x \leq x_0 + \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon). \quad (3.4)$$

3. On suppose que  $x_0$  est adhérent à  $D \cap ]-\infty, x_0[$ . On dit que  $f$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  **à gauche** en  $x_0$ , ce que l'on note par  $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x \in D, (x_0 - \delta \leq x < x_0) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon). \quad (3.5)$$

**Remarques 3.1.1.** 1. Si  $x_0 \in D$  et la limite  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe, alors  $l = f(x_0)$ .

En effet, d'après la définition 3.1, on a  $|f(x_0) - l| \leq \varepsilon$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc  $f(x_0) - l = 0 \iff f(x_0) = l$ .

2. Dans les cas des limites à droite, à gauche ou par valeurs distinctes en  $x_0$ , il n'est pas nécessaire que  $f$  soit définie en  $x_0$ , et si l'une de ces limites existe, elle peut être distincte de  $f(x_0)$ .

**Exemple 3.1.1.** Soit  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \log x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

On a  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq f(1) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq f(1) = 1$ .

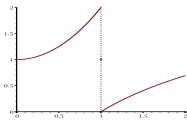


FIGURE 3.1 – Graphe de  $f(x)$ .

**Proposition 3.1.3.** *On suppose que  $f$  est définie à droite et à gauche de  $x_0$ . Pour que  $f$  admette une limite  $l \in \mathbb{R}$  en  $x_0$  par valeurs différentes, il faut et il suffit que  $f$  admette en  $x_0$  une limite à gauche et une limite à droite et que ces deux limites soient égales à  $l$  :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des définitions. □

**Exemple 3.1.2.** *Soit  $g(x) = \begin{cases} \log x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ . On a  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ . Signalons que la fonction  $f$  de l'exemple 3.1.1 n'admet pas de limite en 1.*

### 3.1.3 Limites infinies

**Définition 3.1.5.** *Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  un point adhérent à  $D$ . On dit que  $f$  **tend vers**  $+\infty$  en  $x_0$ , ce que l'on note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta = \delta(A), \forall x \in D, (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) \geq A). \quad (3.6)$$

*On dit que  $f$  **tend vers**  $-\infty$  en  $x_0$ , ce que l'on note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta = \delta(A), \forall x \in D, (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) \leq A). \quad (3.7)$$

**Remarque 3.1.1.** *De même que la définition 3.1.3, la définition 3.1.5 admet des variantes analogues. Par exemple, on dira que  $f$  tend vers  $+\infty$ , par valeurs distinctes (resp. à droite, resp. à gauche) en  $x_0$  si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta = \delta(A) > 0, \forall x \in D, (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) \geq A).$$

*(resp.  $(x_0 < x \leq x_0 + \delta) \Rightarrow (f(x) \geq A)$ , resp.  $(x_0 - \delta \leq x < x_0) \Rightarrow (f(x) \geq A)$ ).*

**Définition 3.1.6.** *Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un ensemble non majoré  $D$ . On dit que  $f$  tend vers  $l \in \mathbb{R}$  (resp.  $+\infty$ , resp.  $-\infty$ ) en  $+\infty$  si*

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists A = A(\varepsilon), \quad \forall x \in D, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \\ \text{(resp. } & \forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A = A(M), \quad \forall x \in D, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M, \\ \text{resp. } & \forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A = A(M), \quad \forall x \in D, x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M). \end{aligned}$$

*On définit de manière analogue la limite de  $f$  en  $-\infty$  si  $D$  est non minoré.*

**Remarque 3.1.2.** *Supposons que  $x_0 \in \mathbb{R}$  et que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Soit  $g$  une fonction qui coïncide avec  $f$  sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ . Alors il découle des définitions de la limite que  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ . Donc la limite de  $f$  en  $x_0$  ne dépend que des valeurs de  $f$  aux points voisins de  $x_0$ . On dit que la notion de limite est de **caractère local**.*

### 3.1.4 Caractérisation séquentielle

La proposition suivante établit un lien entre les limites de suites et les limites de fonctions.

**Théorème 3.1.1.** Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  un point adhérent à  $D$ . Alors, pour que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , il faut et il suffit que, pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ , on ait  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l$ .

*Démonstration.* Il faut distinguer plusieurs cas :  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \pm\infty$ ,  $l \in \mathbb{R}$  ou  $l = \pm\infty$ . Traitons, par exemple, le cas où  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $l \in \mathbb{R}$ .

**Si**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  : Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, |u_n - x_0| \leq \delta.$$

Comme les  $u_n$  appartiennent à  $D$ , on en déduit que

$$\forall n \geq N, |f(u_n) - l| \leq \varepsilon.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l$ .

**Réciproquement, si  $f(x)$  ne tend pas vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  :** alors, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall \delta > 0, \exists u \in D, |u - x_0| \leq \delta \quad \text{et} \quad |f(u) - l| > \varepsilon^2.$$

En donnant à  $\delta$  les valeurs  $\frac{1}{n}$ , on construirait une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  telle que

$$\forall n \geq 1, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(u_n) - l| > \varepsilon.$$

Il est clair que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ , mais la suite  $f(u_n)$  ne converge pas vers  $l$ .

Les autres cas sont analogues et laissés en exercice. □

**Remarque 3.1.3.** Le théorème 3.1.1 est parfois utilisé pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point  $x_0$ . Pour cela, il suffit d'exhiber deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  d'éléments de  $D$  qui admettent  $x_0$  comme limite et telles que  $(f(u_n))$  et  $(f(v_n))$  admettent deux limites distinctes. Par exemple, la fonction  $f: x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite en 0, car les suites  $u_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$  et  $v_n = \frac{1}{n\pi}$  tendent vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors que  $f(u_n) = 1 \rightarrow 1$  et  $f(v_n) = 0 \rightarrow 0$ .

---

2. C'est le contraire de la proposition (3.1)

### 3.1.5 Opérations sur les limites

Le théorème 3.1.1 permet, entre autres, d'étendre les règles de calcul sur les limites de suites aux limites de fonctions.

**Théorème 3.1.2.** Soient  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  un point adhérent à  $D$ . On suppose que les limites  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \overline{\mathbb{R}}$  existent. Alors :

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$  si  $l + l'$  est défini dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (voir page 16).
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ll'$  si  $ll'$  est défini dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (voir page 16).
3. Si de plus  $l' \neq 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = l/l'$  si  $l/l'$  est défini dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (voir page 16).

**Remarque 3.1.4.** Les formes  $+\infty - \infty$ ,  $0 \times (\pm\infty)$ ,  $0/0$  et  $\infty/\infty$  sont indéterminées. Une étude plus approfondie doit être faite pour lever l'indétermination.

**Théorème 3.1.3** (Composition des limites). Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(D) \subset D'$ . Soit  $x_0$  un point adhérent à  $D$  tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . Alors  $l$  est adhérent à  $D'$ , et si de plus  $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l'$  existe, alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = l'$ .

*Démonstration.*  $l$  est adhérent à  $D'$  : Puisque  $x_0$  est adhérent à  $D$ , il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ . En utilisant le théorème 3.1.1 et le fait que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , on conclut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l$ , donc  $l$  est adhérent à  $f(D)$  et à fortiori à  $D'$ .

Montrons que si  $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l'$  existe, alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = l'$ . Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $D$  de limite  $x_0$ . En utilisant le théorème 3.1.1, on déduit successivement que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(u_n)) = l'$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = l'$ . □

### 3.1.6 Théorème de la limite monotone

**Définition 3.1.7.** On dit que la fonction  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  est **croissante** (resp. **strictement croissante**) si, pour tout  $(x, y) \in D^2$ ,  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  (resp.  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ).  $f$  est dite **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si  $-f$  est croissante (resp. strictement croissante).

$f$  est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) si  $f$  est soit croissante soit décroissante (resp. soit strictement croissante soit strictement décroissante).

**Théorème 3.1.4** (de la limite monotone). Soit  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante. Alors pour tout  $x_0 \in ]a, b[$ , les limites  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  existent et on a

$$\sup_{a < t < x_0} f(t) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < t < b} f(t). \quad (3.8)$$

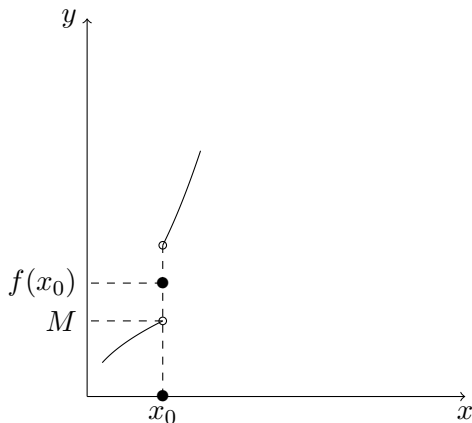
D'autre part, si  $a < x_0 < x_1 < b$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$ .

Il existe un résultat analogue pour les fonctions décroissantes, mais le sens des inégalités est inversé.

*Démonstration.* Par hypothèse, l'ensemble  $\{f(t)/a < t < x_0\}$  est majoré par  $f(x_0)$ , donc il admet une borne supérieure  $M = \sup_{a < t < x_0} f(t) \leq f(x_0)$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par définition de la borne supérieure, il existe  $\delta > 0$ ,  $a < x_0 - \delta < x_0$ , tel que  $M - \epsilon < f(x_0 - \delta) \leq M$ . Puisque  $f$  est croissante, on a

$$\forall t \in [x_0 - \delta, x_0[ , M - \epsilon < f(x_0 - \delta) \leq f(t) \leq M.$$

Donc  $M = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .



On démontre de même, que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < t < b} f(t) \quad (3.9)$$

Soit maintenant  $a < x_0 < x_1 < b$ . On a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < t < b} f(t) = \inf_{x_0 < t < x_1} f(t).$$

La dernière égalité provient de la formule (3.9) appliquée à la restriction de  $f$  à  $]x_0, x_1[$ . De même, on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = \sup_{a < t < x_1} f(t) = \sup_{x_0 < t < x_1} f(t).$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x)$ . □

### 3.1.7 Critère de Cauchy pour les fonctions

Comme pour les suites, le critère de Cauchy permet de caractériser l'existence d'une limite finie pour une fonction sans connaître la valeur de cette limite.

**Définition 3.1.8.** Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0$  un point adhérent à  $D$ . On dit que  $f$  satisfait le critère de Cauchy au point  $x_0$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x, y \in V \cap D, |f(x) - f(y)| \leq \epsilon. \quad (3.10)$$

Ce qui veut dire, de manière détaillée :

— si  $x_0$  est fini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in D, (|x - x_0| \leq \delta, |y - x_0| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

— si  $x_0 = +\infty$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A = A(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in D, (x \geq A, y \geq A) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

— si  $x_0 = -\infty$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A = A(\varepsilon) < 0, \forall x, y \in D, (x \leq A, y \leq A) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

**Théorème 3.1.5.** Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  un point adhérent à  $D$ . Pour que  $f$  admette une limite finie en  $x_0$ , il faut et il suffit que  $f$  vérifie le critère de Cauchy en  $x_0$ .

*Démonstration.* **La condition est nécessaire** : Soit  $\varepsilon > 0$ . L'existence de la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ entraîne :}$$

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V \cap D, |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$\forall x, y \in V \cap D, |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**La condition est suffisante** : Puisque  $x_0$  est adhérent à  $D$ , on peut trouver une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $V$  le voisinage de  $x_0$  associé à  $\varepsilon$  par le critère (3.10). On peut trouver un rang  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \in V$  (car  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ ). On en déduit que :

$$\forall n, m \geq N, |f(u_n) - f(u_m)| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite réelle  $(f(u_n))_n$  est une suite de Cauchy, et par suite elle est convergente. Soit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l \in \mathbb{R}$ . Donc il existe  $N' > N$  tel que

$$\forall n \geq N', |f(u_n) - l| \leq \varepsilon.$$

Soit  $x \in V \cap D$ . On a  $|f(x) - f(u_{N'})| \leq \varepsilon$  ( car  $x, u_{N'} \in V \cap D$ ) et  $|f(u_{N'}) - l| \leq \varepsilon$ .  
Donc :

$$\forall x \in V \cap D, |f(x) - l| \leq |f(x) - f(u_{N'})| + |f(u_{N'}) - l| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

□

### 3.1.8 Equivalence des fonctions au voisinage d'un point

**Définition 3.1.9.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles. On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** au voisinage de  $x_0$ , ce que l'on note  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ , s'il existe une fonction  $h$  définie au voisinage de  $x_0$  telle que

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1.$$

Si  $g(x) \neq 0$  au voisinage de  $x_0$ , alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nous regroupons ci-dessous les principales propriétés de la relation d'équivalence des fonctions (analogues aux propriétés de la relation d'équivalence des suites).

- Proposition 3.1.4.** — La relation  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$  est une relation d'équivalence (ie. réflexive, symétrique et transitive) entre les fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .
- Si  $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)$  et  $f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x)$ , alors  $f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)g_2(x)$  (on peut multiplier les équivalents).
  - En général, on ne peut pas ajouter les équivalents :  $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)$  et  $f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x)$  n'entraîne pas que  $f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$ .
  - si  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .
  - Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$  et si  $l \in \mathbb{R}^*$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ .
  - si  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ , alors  $f(x)$  et  $g(x)$  sont de même signe au voisinage de  $x_0$ .

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

- Exemples 3.1.2.**
1.  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{tg} x$ .
  2.  $\log(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .
  3.  $a_n x^n + \dots + a_x + a_0 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$  si  $a_n \neq 0$ .

## 3.2 Continuité des fonctions

**Définition 3.2.1.** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \overline{D}$ . On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (3.11)$$

On dit que  $f$  est continue à droite (resp. à gauche) en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$  (resp. si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)).$$

On dit que  $f$  est continue sur  $D$  si  $f$  est continue en tout point de  $D$ .

Pour que  $f$  soit continue en  $x_0$  il faut (et il suffit) que  $f$  soit définie en  $x_0$  ( $x_0 \in D$ ) et que la limite  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe (dans  $\mathbb{R}$ ) (car dans ce cas  $l = f(x_0)$ , cf. remarque 3.1.1).

Si  $f$  n'est pas définie en  $x_0 \in \mathbb{R}$  et si  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe (dans  $\mathbb{R}$ ), alors la fonction  $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en  $x_0$  et appelée **prolongement par continuité** de  $f$  en  $x_0$ .

**Exemple 3.2.1.** *Etudions la continuité de la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

On remarque que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ , donc  $f$  est continue en 0. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . On peut trouver deux suites  $(r_n)$  de rationnels et  $(\rho_n)$  d'irrationnels qui convergent vers  $x_0$  (on utilise ici la densité de  $\mathbb{Q}$  et de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ ). On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(\rho_n) = 0$ , donc  $f$  n'admet pas de limite en  $x_0$ , et par suite  $f$  est discontinue en  $x_0$ .

**Remarque 3.2.1.** On déduit du caractère local de la notion de limite, que si  $U_0$  est un voisinage de  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$  si, et seulement si, sa restriction à  $U_0 \cap D$  est continue en  $x_0$ .

### 3.2.1 Propriétés des fonctions continues

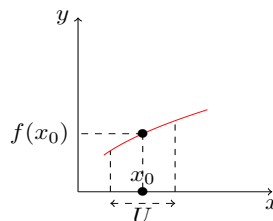
Les fonctions continues se comportent bien avec les suites :

**Proposition 3.2.1.** *Une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si, et seulement si, pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(x_0)$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 3.1.1. □

**Proposition 3.2.2.** *Si  $f$  est continue en  $x_0$  et si  $f(x_0) \neq 0$ , alors  $f(x)$  est de même signe que  $f(x_0)$  au voisinage de  $x_0$ .*

*Démonstration.* Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer que  $f(x_0) > 0$ . Puisque  $f$  est continue en  $x_0$ , on peut associer à  $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ , un voisinage  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  tel que  $x \in D \cap U \Rightarrow \varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ . On en déduit que, pour tout  $x \in D \cap U$ ,  $f(x) > f(x_0) + \varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ , donc  $f(x) > 0$  pour  $x \in D \cap U$ . □





**Théorème 3.2.1.** Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ ,  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y_0 = f(x_0)$ . Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  est continue en  $y_0$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 3.1.3 de composition des limites.  $\square$

**Théorème 3.2.2.** Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues en  $x_0 \in D$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lambda f + g$  et  $f \cdot g$  sont continues en  $x_0$ . Si de plus  $g(x_0) \neq 0$ , alors  $f/g$  est définie au voisinage de  $x_0$  et elle est continue en  $x_0$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 3.1.2.  $\square$

## Fonctions uniformément continues

**Définition 3.2.2** (Fonction uniformément continue). Une application  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **uniformément continue** (u.c en abrégé) sur  $D$  si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in D, (|x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon). \quad (3.12)$$

**Remarques 3.2.1.** — La continuité uniforme est de caractère global (elle dépend de l'ensemble  $D$ ), alors que la continuité est de caractère local (elle ne dépend que du point  $x_0$  et non de l'ensemble  $D$ ).

- Si  $f$  est u.c sur  $D$  et si  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont deux suites d'éléments de  $D$  telles que  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , alors  $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ . En effet, soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\delta > 0$  le nombre qui lui est associé par la condition (3.12). On peut trouver un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|x_n - y_n| < \delta$ . Donc  $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ .
- La continuité uniforme est plus forte que la continuité : dans la condition 3.7,  $\delta$  dépend à la fois de  $x_0$  et de  $\varepsilon$ , alors que dans la condition 3.12, il ne dépend que de  $\varepsilon$ . Donc une application u.c sur  $D$  est continue sur  $D$ , mais la réciproque est fautive en général : la fonction  $f : x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , mais elle n'y est pas u.c, car en posant  $x_n = n, y_n = n + 1/(n + 1)$ , on a  $x_n - y_n \rightarrow 0$  mais  $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$ .

Une classe importante d'applications u.c. est celle des applications lipschitziennes :

**Définition 3.2.3.** Une application  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dite ***k*-lipschitzienne**, où  $k$  est un réel positif si

$$\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Par exemple, les fonctions sin et cos sont 1-lipschitziennes sur  $\mathbb{R}$ .

## 3.3 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

### 3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 3.3.1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue telle que  $f(a)f(b) \leq 0$ . Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer le cas où  $f(a)f(b) < 0$ . Quitte à considérer  $-f$ , on peut supposer que  $f(a) > 0$  et que  $f(b) < 0$ . Posons

$$E = \{x \in [a, b] / f(x) > 0\}.$$

$E$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide ( $a \in E$ ) et majorée (par  $b$ ). Soit  $c = \sup E$ . On a :  $a \leq c \leq b$ .

**Si  $f(c) > 0$**  : alors  $c < b$  et puisque  $f$  est continue en  $c$ , alors il existerait  $d \in ]c, b[$  tel que  $f(d) > 0$  (cf. proposition 3.2.2). On aurait alors  $d \in E$  et  $d > c = \sup E$ . Contradiction.

**Si  $f(c) < 0$**  : alors  $a < c$ . En utilisant une fois de plus la continuité de  $f$  en  $c$  et la proposition 3.2.2, on peut trouver  $c' \in [a, c[$  tel que  $c' < x \leq c \Rightarrow f(x) < 0$ . D'autre part, puisque  $c' < c = \sup E$ , il existe  $y \in E, c' < y \leq c$ . On aboutit à la contradiction  $f(y) < 0$  et  $y \in E$ . En fin de compte, la seule possibilité qui reste est  $f(c) = 0$ .

□

**Théorème 3.3.2** (théorème des valeurs intermédiaires). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soient  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ . Toute valeur comprise entre  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  est atteinte par  $f$  :*

$$\forall \gamma \in [\min(f(x_1), f(x_2)), \max(f(x_1), f(x_2))], \exists \alpha \in [x_1, x_2], f(\alpha) = \gamma$$

*Démonstration.* Soit  $\gamma \in [\min(f(x_1), f(x_2)), \max(f(x_1), f(x_2))]$ , et soit  $g : [x_1, x_2] \ni x \mapsto [f(x) - \gamma]$ .  $g$  est continue et vérifie  $g(x_1)g(x_2) \leq 0$ . On applique alors le théorème 3.3.1 à  $g$  sur  $[x_1, x_2]$ . □

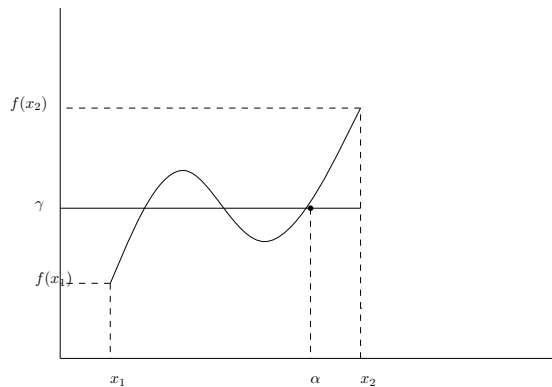


FIGURE 3.2 – Toute valeur  $\gamma$  comprise entre  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  est atteinte par  $f$  au moins une fois.

**Lemme 6** (Caractérisation des intervalles). *Soit  $I \subset \mathbb{R}$ .  $I$  est un intervalle si, et seulement si,*

$$\forall x, y \in I, (x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset I) \quad (*)$$

*Démonstration.* La condition est manifestement nécessaire. Inversement si  $(*)$  est satisfaite, alors en utilisant la définition des bornes supérieure et inférieure, on peut écrire si  $I \neq \emptyset$  :

$$] \inf I, \sup I[ \subset I \subset [\inf I, \sup I] \subset \overline{\mathbb{R}}$$

Donc  $I$  est un intervalle. Si  $I = \emptyset$ , alors on peut considérer  $I$  comme un intervalle ouvert :  $I = ]0, 0[$ . □

**Corollaire 3.3.1.** *L'image continue d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  est un intervalle.*

*Démonstration.* Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . On a, d'après le théorème 3.3.1, pour tout  $u, v \in f(I)$ ,  $u < v \Rightarrow [u, v] \subset f(I)$ . Donc  $f(I)$  est un intervalle, d'après le lemme ci-dessus.  $\square$

### 3.3.2 Théorème des valeurs extrémales

**Définition 3.3.1.** *Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **majorée** sur une partie  $A \subset D$  s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \leq M$ , pour tout  $x \in A$ .  $f$  est dite **minorée** (resp. **bornée**) sur  $A$  si  $(-f)$  (resp.  $|f|$ ) est majorée sur  $A$ .*

**Théorème 3.3.3** (de Weierstrass). *Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  fermé et borné, alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes :*

$$\exists \mu, \lambda \in [a, b], \forall x \in [a, b], f(\mu) \leq f(x) \leq f(\lambda). \quad (3.13)$$

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde, que  $f$  n'est pas majorée sur  $[a, b]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver  $x_n \in [a, b]$  tel que  $f(x_n) > n$ . La suite  $(x_n)$  étant bornée, on peut en extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge vers un point  $l \in [a, b]$  (Bolzano-Weierstrass). On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$ , car  $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n)$ , pour tout  $n$ . Or  $f$  est continue en  $l$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = l$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$ . Contradiction. Donc  $f$  est majorée sur  $[a, b]$ . Montrons à présent qu'il existe  $\lambda \in [a, b]$  tel que  $f(\lambda) = M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ . Par définition de

$M$ , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a, b], M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq M.$$

Donnons à  $\varepsilon$  les valeurs  $1/n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), pour obtenir une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $[a, b]$  telle que pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $M - 1/n < f(x_n) \leq M$ . On applique de nouveau le théorème de Bolzano-Weierstrass pour extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{\psi(n)})$  qui converge vers une limite  $\lambda \in [a, b]$ . Par continuité de  $f$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\psi(n)}) = f(\lambda)$ . Or  $M - 1/\psi(n) < f(x_{\psi(n)}) \leq M$ , et par passage à la limite, on obtient  $M \leq f(\lambda) \leq M$ , donc  $M = f(\lambda)$ .

Pour terminer la démonstration, on applique ce qui précède à  $-f$ , pour en déduire que  $f$  est minorée et atteint sa borne inférieure.  $\square$

**Remarque 3.3.1.** — *L'hypothèse de "l'intervalle fermé et borné" dans le théorème 3.3.3 est essentielle :*

1. *la fonction  $f : x \mapsto x$  est continue et bornée sur l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ , mais elle n'atteint pas ses bornes.*
2. *la fonction  $g : x \mapsto 1/x$  est continue sur l'intervalle  $]0, 1]$  mais elle n'est pas bornée.*
3. *la fonction  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $[0, +\infty[$  mais elle n'est pas bornée.*

— *En combinant les théorèmes 3.3.2 et 3.3.3, on peut dire que **l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.***

### 3.3.3 Théorème de Heine

**Théorème 3.3.4** (de Heine). *Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue.*

*Démonstration.* Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Supposons, par l'absurde, que  $f$  n'est pas u.c sur  $[a, b]$  :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En donnant à  $\delta$  la valeur  $1/n$ , on trouverait  $x_n, y_n \in [a, b]$  tels que  $|x_n - y_n| < 1/n$  et  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  de  $(x_n)$  qui est convergente vers un point  $c \in [a, b]$ . Comme  $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq 1/\varphi(n) \rightarrow 0$ , on en déduit que  $(y_{\varphi(n)})$  converge aussi vers  $c$ . Or  $f$  est continue en  $c$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(c)$ . Ceci contredit le fait que  $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon > 0$ , pour tout  $n \geq 1$ .  $\square$

### 3.3.4 Monotonie et continuité

**Théorème 3.3.5.** *Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone sur l'intervalle  $I$ . Pour que  $f$  soit continue sur  $I$ , il faut et il suffit que  $f(I)$  soit un intervalle.*

*Démonstration.* La condition est nécessaire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Inversement, supposons que  $f(I)$  soit un intervalle et que, par exemple,  $f \nearrow$ . Supposons qu'il existe  $x_0 \in I$  où  $f$  est discontinue. Puisque  $f \nearrow$ , l'une au moins des inégalités suivantes est vérifiée :

$$l_- := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0) \quad \text{ou} \quad f(x_0) < l_+ := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Supposons, par exemple, que  $f(x_0) < l_+$ . Dans ce cas, on aurait pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$  si  $x \leq x_0$  et  $l_+ \leq f(x)$  si  $x_0 < x$  (cf. théorème 3.1.4). Donc

$$f(I) \cap ]f(x_0), l_+[ = \emptyset.$$

Fixons  $x_1 \in I$ ,  $x_1 > x_0$ . Comme  $f(I)$  est un intervalle et qu'il contient les points  $f(x_0)$  et  $f(x_1)$ , on a  $]f(x_0), f(x_1)] \subset f(I)$ . D'autre part

$$\emptyset \neq ]f(x_0), l_+[ \subset ]f(x_0), f(x_1)] \subset f(I)$$

On obtient une contradiction. On traitera de manière analogue le cas où  $l_- < f(x_0)$ . Donc  $f$  est partout continue sur  $I$ . Démonstration analogue si  $f$  est décroissante.  $\square$

**Théorème 3.3.6** (théorème de la fonction réciproque). *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone. Alors la fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ . La fonction réciproque  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  est continue, strictement monotone et varie dans le même sens que  $f$ .*

*Démonstration.* Puisque  $f$  est strictement monotone, elle est aussi injective et réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  et la fonction réciproque  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  est strictement monotone (elle a le même sens de variation que  $f$ ). Il reste à prouver la continuité de  $f^{-1}$ . Notons d'abord que  $f(I)$  est un intervalle (car  $f$  est continue). D'autre part  $f^{-1}(f(I)) = I$  est un intervalle et  $f^{-1}$  est monotone, donc d'après le théorème 3.3.5,  $f^{-1}$  est continue.  $\square$

**Proposition 3.3.1.** Une fonction continue  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervalle) est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.

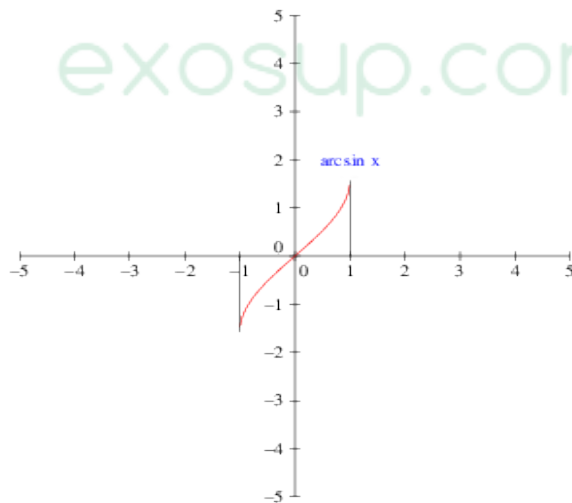
*Démonstration.* La condition est suffisante. Inversement, supposons que  $f$  soit injective. Soit  $(a, b, c) \in I^3, a < b < c$ . Supposons, par l'absurde, que  $f(b)$  n'est pas compris entre  $f(a)$  et  $f(c)$ . Par exemple  $f(c)$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait  $t \in [a, b]$  tel que  $f(t) = f(c)$ . Donc  $a \leq c = t \leq b$ , puisque  $f$  est injective. Contradiction. On raisonnerait de même si  $f(a)$  était compris entre  $f(b)$  et  $f(c)$ . Donc si  $I \ni a < b < c \in I$ , alors  $f(b)$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(c)$ .

Fixons-nous maintenant  $a$  et  $b$  dans  $I, a < b$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut supposer que  $f(a) < f(b)$ . Montrons alors que  $f$  est croissante. Soit  $(x, y) \in I^2, x < y$ . En étudiant les différentes positions possibles de  $a, b, x, y$ , on montrera que  $f(x) < f(y)$  : par exemple si  $a < x < b < y$ , on aurait  $f(a) < f(x) < f(b) < f(y)$ , donc  $f(x) < f(y), \dots$  etc.  $\square$

### 3.3.5 Applications : Réciproques des fonctions circulaires

La fonction  $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et strictement croissante et  $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$ . Donc elle réalise une bijection de  $[-\pi/2, \pi/2]$  sur  $[-1, 1]$ . Sa fonction réciproque est notée Arcsin. On a

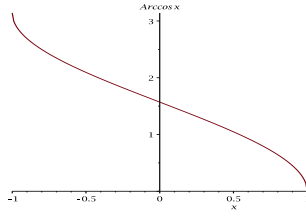
$$\left( y = \sin x, |x| \leq \frac{\pi}{2} \right) \iff (x = \text{Arcsin } y, |y| \leq 1).$$



De même la fonction  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  est continue et strictement décroissante et  $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ . Donc elle réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ . Sa fonction

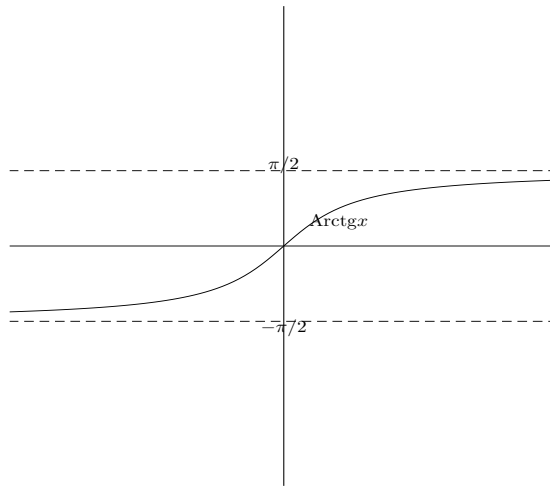
récioproque est notée Arccos. On a

$$(y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi) \iff (x = \text{Arccos } y, |y| \leq 1).$$



Enfin, la fonction  $\text{tg} : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et strictement croissante. Donc elle réalise une bijection de  $]-\pi/2, \pi/2[$  sur  $\mathbb{R}$  et sa récioproque est notée Arctg :

$$\left( y = \text{tg } x, |x| < \frac{\pi}{2} \right) \iff (x = \text{Arctg } y, y \in \mathbb{R}).$$



Signalons que les graphes d'une fonction bijective et de sa récioproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

# Chapitre 4

## Dérivées

Dans tout ce qui suit, on considère des fonctions réelles définies sur un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  (ie. non vide et non réduit à un point).

### 4.1 Applications dérivables

**Définition 4.1.1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (x = x_0 + h)$$

existe (dans  $\mathbb{R}$ ). Cette limite est appelée **dérivée** de  $f$  au point  $x_0$ , et notée par :

$$f'(x_0), Df(x_0), \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} \quad \text{si } y = f(x).$$

On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$ , si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ . La fonction  $f' : x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$  s'appelle la **fonction dérivée** de  $f$ .

La proposition suivante donne une définition équivalente de la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$ .

**Proposition 4.1.1.**  $f$  est dérivable en  $x_0$  si, et seulement si, il existe un réel  $l$  et une fonction réelle  $\varepsilon$  définie au voisinage de 0 tels que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (4.1)$$

*Démonstration.* La condition est suffisante : si la formule (4.1) est vérifiée, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [l + \varepsilon(h)] = l,$$

et par suite  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = l$ .

Inversement, si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , posons :

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) & \text{si } x_0 + h \in I, h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

On a alors, pour  $x_0 + h \in I$  :

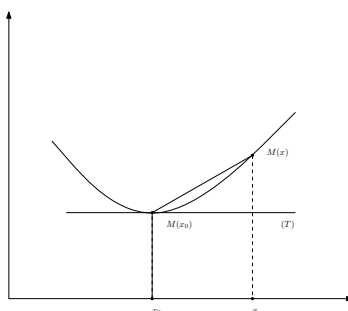
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

□

**Remarque 4.1.1.** La formule 4.1 signifie qu'au voisinage de 0, on peut approcher  $f(x_0 + h)$  par la fonction affine  $h \mapsto f(x_0) + hf'(x_0)$ , avec une erreur négligeable devant  $h$ .

### Interprétation géométrique de la dérivée

Lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ , le point  $M(x) = M(x, f(x))$  tend vers le point  $M(x_0) = M(x_0, f(x_0))$  (si  $f$  est continue). Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , la droite  $(M(x)M(x_0))$  tend vers une droite  $(T)$  dont la pente est  $f'(x_0)$  et qui s'appelle la **tangente** au graphe de  $f$  en  $M_0$  (ou, par abus de langage, au point  $x_0$ ).



Equation cartésienne de la **tangente**  $(T)$  en  $M_0$  :  $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ .

### Dérivées d'un côté

**Théorème et définition 4.1.1.** Si  $x_0 \neq \sup I$  (resp.  $x_0 \neq \inf I$ ) et si le **taux d'accroissement**  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite à droite (resp. à gauche) en  $x_0$ , on dit que  $f$  est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) en  $x_0$ . Cette limite est appelée **dérivée à droite** (resp. **à gauche**) de  $f$  en  $x_0$ , et notée par  $f'_d(x_0)$  (resp.  $f'_g(x_0)$ ).

Pour que  $f$  soit dérivable en un point  $x_0 \in ]\inf I, \sup I[$ , il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  et que  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

Par exemple, la fonction  $f(x) = |x|$  n'est pas dérivable en 0, car  $f'_d(0) = 1 \neq f'_g(0) = -1$ .

**Remarque 4.1.2.** Si  $f$  est dérivable à droite (resp. à gauche) en  $x_0$ , on définit une **demi-tangente** à droite (resp. à gauche) en  $M_0(x_0, f(x_0))$ . C'est la demi-droite passant par  $M_0$  de pente  $f'_d(x_0)$  et dirigée vers la droite (resp. la gauche) de  $M_0$ . Lorsque  $f'_d(x_0)$  et  $f'_g(x_0)$  existent et sont différentes, on dit que  $M_0$  est un **point anguleux** de la courbe de  $f$ .

**Proposition 4.1.2.** Si  $f$  est dérivable à droite ( resp. à gauche ) en  $x_0$ , alors  $f$  est continue à droite ( resp. à gauche ) en  $x_0$ . En particulier si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ .



*Démonstration.* Par exemple, si  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \times f'_d(x_0) = 0$ .

□

**Remarque 4.1.3.** La réciproque est fautive : la fonction  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est continue en 0 sans être dérivable (ni à droite ni à gauche) en ce point. De même, la fonction  $x \mapsto |x|$  est continue en 0 sans y être dérivable.

## Dérivées d'ordre supérieur

Si la fonction  $f'$  admet à son tour une dérivée en  $x_0$ , celle-ci s'appelle **dérivée seconde** de  $f$  en  $x_0$ , et on la note par  $f''(x_0)$ . Si  $f'$  est partout dérivable, on définit la dérivée seconde de  $f$  comme étant la dérivée de  $f'$ . On définit de proche en proche les dérivées successives de  $f$ ; La dérivée d'ordre  $n$  est notée par  $f^{(n)}$  ou  $\frac{d^n f}{dx^n}$  et l'on a  $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$ .

**Remarque 4.1.4.** Pour que  $f$  admette une dérivée d'ordre  $n$  en  $x_0$ , il faut et il suffit que  $f$  soit  $(n - 1)$  fois dérivable sur un intervalle  $J \subset I$  voisinage de  $x_0$  et que la fonction  $f^{(n-1)}$  soit dérivable en  $x_0$ .

On vérifie, par une récurrence facile, que

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(n)} &= \sin \left(x + n \frac{\pi}{2}\right); \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos \left(x + n \frac{\pi}{2}\right); \\ \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

## Fonctions de classe $C^n$

**Définition 4.1.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $f$  est **de classe  $C^n$**  sur  $I$ , et l'on écrit  $f \in C^n(I)$ , si  $f$  admet une dérivée d'ordre  $n$  qui est continue sur  $I$ .  $f$  est dite **de classe  $C^\infty$**  sur  $I$ , et l'on écrit  $f \in C^\infty(I)$ , si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ .

On convient de dire que  $f$  est **de classe  $C^0$**  si  $f$  est continue et que  $f^{(0)} = f$ .

On a alors les inclusions suivantes :

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I) = C^\infty(I) \subset \dots \subset C^{n+1}(I) \subset C^n(I) \subset \dots \subset C^0(I).$$

### 4.1.1 Règles de dérivation

**Proposition 4.1.3.** Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables en  $x_0$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors :

- (i)  $\alpha f + g$  est dérivable en  $x_0$  et  $(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0)$ .
- (ii)  $fg$  est dérivable en  $x_0$  et  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .

(iii) si  $g(x_0) \neq 0$  alors  $\frac{f}{g}$  est définie au voisinage de  $x_0$  et dérivable en  $x_0$  et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

*Démonstration.* Laissez en exercice. □

**Théorème 4.1.1** (Dérivée d'une fonction composée). Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications telles que  $f(I) \subset J$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et que  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ . Alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et l'on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)). \quad (4.2)$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h), \quad \left(\varepsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0\right) \\ g(y_0 + k) - g(y_0) &= kg'(y_0) + k\varepsilon_2(k) \quad \left(y_0 = f(x_0); \varepsilon_2(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0\right). \end{aligned}$$

On en déduit, pour  $k = k(h) = h[f'(x_0) + \varepsilon_1(h)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , que

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = hf'(x_0)g'(f(x_0)) + h\varepsilon(h),$$

où  $\varepsilon(h) = f'(x_0)\varepsilon_2(k(h)) + g'(f(x_0))\varepsilon_1(h) + \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(k(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . □

En utilisant le théorème 4.1.1, on déduit que

**Corollaire 4.1.1.** La dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire.

### Formule de Leibniz

**Proposition 4.1.4** (Formule de Leibniz). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs réelles telles que  $f^{(n)}(x_0)$  et  $g^{(n)}(x_0)$  existent. Alors  $(f \cdot g)^{(n)}(x_0)$  existe et l'on a :

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0), \quad \text{où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4.3)$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence. Pour  $n = 1$ , la formule (4.3) se réduit à la formule connue  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ . Supposons la formule (4.3) vraie jusqu'à l'ordre  $n$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs réelles telles que  $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$  et  $g^{(n+1)}(x_0) = (g^{(n)})'(x_0)$  existent. Il existe un voisinage  $J \subset I$  de  $x_0$  sur lequel  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables et on peut écrire, pour tout  $x \in J$  :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

En dérivant les deux membres de l'équation ci-dessus en  $x_0$  (ce qui est licite), on peut écrire :

$$(fg)^{(n+1)}(x_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k [f^{(k)}g^{(n-k)}]'(x_0) \quad (4.4)$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k [f^{(k+1)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0) + f^{(k)}(x_0)g^{(n-k+1)}(x_0)] \quad (4.5)$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0) + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x_0)g^{(n-k+1)}(x_0) \quad (4.6)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(j)}(x_0)g^{(n-j+1)}(x_0) + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x_0)g^{(n-k+1)}(x_0) \quad (4.7)$$

$$= \sum_{j=1}^n (C_n^{j-1} + C_n^j) f^{(j)}(x_0)g^{(n-j+1)}(x_0) + f^{(n+1)}(x_0)g^{(0)}(x_0) + f^{(0)}(x_0)g^{(n+1)}(x_0)$$

$$= \sum_{j=1}^n C_{n+1}^j f^{(j)}(x_0)g^{(n-j+1)}(x_0) + f^{(n+1)}(x_0)g^{(0)}(x_0) + f^{(0)}(x_0)g^{(n+1)}(x_0) \quad (4.8)$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} f^{(j)}(x_0)g^{(n-j+1)}(x_0). \quad (4.9)$$

(Dans l'équation (4.7), on a posé  $j = k + 1$ , et on a utilisé le fait que l'indice  $k$  est muet dans la somme  $\sum_{k=0}^n = \sum_{j=0}^n$ . On a aussi utilisé les formules :  $C_n^0 = C_n^n = 1$  et  $C_n^{j-1} + C_n^j = C_{n+1}^j$ , pour  $1 \leq j \leq n$ ).  $\square$

### Dérivée d'une fonction réciproque

**Théorème 4.1.2** (Dérivée d'une fonction réciproque). *Soit  $f : I \rightarrow J$  une bijection continue et strictement monotone de l'intervalle  $I$  sur l'intervalle  $J$  telle que  $f$  admet une dérivée non nulle en  $x_0$  :  $f'(x_0) \neq 0$ . Alors la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $x_0$  et l'on a :*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (4.10)$$

*Démonstration.* Posons  $g = f^{-1}$ ,  $x = g(y)$  et  $y_0 = f(x_0)$ . Pour  $y \neq y_0$ , on peut écrire :

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \varphi(x).$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$ . Et puisque  $g$  est continue, on a  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = x_0$ . Donc

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(g(y)) = 1/f'(x_0). \quad \square$$

### Dérivées des réciproques des fonctions circulaires

**Proposition 4.1.5.** *La fonction Arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$  et on a :*

$$\forall x \in ] -1, 1[, \frac{d}{dx}(\text{Arcsin } x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (4.11)$$

*Démonstration.* La dérivée de la fonction  $x = \sin y$  est  $\cos y$ , celle de la fonction réciproque est  $y' = \frac{1}{\cos y}$  sous réserve que  $\cos y \neq 0$ , c'est-à-dire que  $x \neq \pm 1$ . D'autre part,  $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$  et, en tenant compte du fait  $\cos y \geq 0$  pour  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos y = +\sqrt{1 - x^2}$ . D'où la formule (4.11).  $\square$

**Proposition 4.1.6.** *La fonction Arccos est dérivable sur  $] -1, 1[$  et on a :*

$$\forall x \in ] -1, 1[, \frac{d}{dx}(\text{Arccos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (4.12)$$

*Démonstration.* beginproof La dérivée de la fonction  $x = \cos y$  est  $-\sin y$ , celle de la fonction réciproque est  $y' = -\frac{1}{\sin y}$  sous réserve que  $\sin y \neq 0 \iff y \notin \{0, \pi\}$ , c'est-à-dire que  $x \neq \pm 1$ . D'autre part,  $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$  et, en tenant compte du fait que  $\sin y \geq 0$  pour  $0 \leq y \leq \pi$ ,  $\sin y = +\sqrt{1 - x^2}$ . D'où la formule (4.12).  $\square$

**Remarque 4.1.5.** *L'application  $x \mapsto \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$  est continue sur  $[-1, 1]$  de dérivée nulle sur  $] -1, 1[$ , donc elle est constante sur  $[-1, 1]$ . Comme  $\text{Arcsin } 0 + \text{Arccos } 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ , on en déduit :*

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}}. \quad (4.13)$$

**Proposition 4.1.7.** *La fonction Arctg est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}(\text{Arctg } x) = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (4.14)$$

*Démonstration.* Car la dérivée de  $x = \text{tg } y$  étant  $1 + \text{tg}^2 y$ , celle de sa la fonction réciproque est  $y' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$ .  $\square$

**Remarque 4.1.6.** *La fonction  $f : x \mapsto \text{Arctg } x + \text{Arctg } \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et sa dérivée est nulle. Donc elle est constante sur les intervalles  $\mathbb{R}_-^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme  $\text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$  et que  $f$  est impaire, on obtient :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctg } x + \text{Arctg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{sgn } x = \begin{cases} +\pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}}. \quad (4.15)$$

## 4.1.2 Extrema relatifs

**Définition 4.1.3.** *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  admet en  $x_0$  un **maximum (resp. minimum) relatif (ou local)**, s'il existe un voisinage  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  tel que pour tout  $x \in V \cap I$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$  (resp.  $f(x_0) \leq f(x)$ ).*

*On dit que  $f$  amet un **extremum relatif** en  $x_0$ , si  $f$  admet un maximum ou un minimum relatif en  $x_0$ .*

*On dit que  $f$  admet en  $x_0$  un maximum (resp. minimum) **absolu (ou global)** si  $f(x) \leq f(x_0)$  (resp.  $f(x_0) \leq f(x)$ ), pour tout  $x \in I$ .*

**Proposition 4.1.8** (Condition nécessaire d'extremum). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si en un point  $x_0 \in ]\inf I, \sup I[$ ,  $f$  admet un maximum relatif (resp. un minimum relatif) et admet en  $x_0$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche, alors

$$f'_d(x_0) \leq 0 \leq f'_g(x_0) \quad (\text{resp. } f'_g(x_0) \leq 0 \leq f'_d(x_0)).$$

En particulier si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

*Démonstration.* Supposons, par exemple, que  $f$  admet un maximum relatif en  $x_0$ . Il existe alors un réel  $\eta > 0$  tel que  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \subset I$  et tel que  $f(x) \leq f(x_0)$  pour tout  $x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ . On en déduit que  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$  si  $x_0 < x < x_0 + \eta$  et  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  si  $x_0 - \eta < x < x_0$ . Donc :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0).$$

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0)$ , donc  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

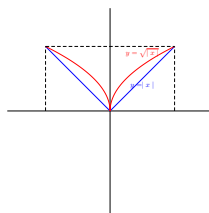
**Remarque 4.1.7.** La réciproque de la proposition 4.1.8 est inexacte en général, comme l'illustre l'exemple de la fonction  $x \mapsto x^3$  qui a une dérivée nulle en 0, mais n'a pas d'extremum relatif en ce point.

## 4.2 Théorème des Accroissements Finis

**Théorème 4.2.1** (Théorème de Rolle). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique. On suppose que  $f$  est **continue sur**  $[a, b]$ , **dérivable en tout point de**  $]a, b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$ . Il existe alors un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est constante sur  $[a, b]$ , le résultat est trivial, car alors  $f'(x) = 0$ , pour tout  $x \in ]a, b[$ . Supposons donc  $f$  non constante. Etant continue sur  $[a, b]$ ,  $f$  est bornée et atteint ses bornes, et l'on peut supposer que l'une au moins de ces bornes, la borne supérieure  $M$  par exemple, est différente de  $f(a) = f(b)$ . Il existe alors  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = M$ .  $c$  est alors un maximum (absolu) de  $f$ . Puisque  $f$  est dérivable en  $c$ , on a  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Remarque 4.2.1.** — Si  $f(a) = f(b) = 0$ , le théorème de Rolle s'énonce : "Entre deux zéros d'une fonction dérivable, il existe au moins un zéro de sa dérivée".



- Soient  $f(x) = \sqrt{|x|}$  et  $g(x) = |x|$ . Le théorème de Rolle ne s'applique ni à  $f$  ni à  $g$  sur  $[-1, 1]$ , (elles sont continues sur  $[-1, 1]$ , vérifient  $f(-1) = f(1)$  et  $g(-1) = g(1)$ , mais elles ne sont pas dérivables sur  $] -1, 1[$ ) : Il n'existe pas de point  $c \in ] -1, 1[$  en lequel  $f'(c) = 0$  ou  $g'(c) = 0$ .

**Théorème 4.2.2** (Théorème des accroissements finis). *Soit  $f$  une fonction numérique continue sur un segment  $[a, b]$ ,  $a < b$ , dérivable en tout point de  $]a, b[$ . Il existe alors un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction auxillaire  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

□

### 4.2.1 Autres formulations du théorème des accroissements finis

Si  $b \neq a$  et  $f$  est une fonction continue sur  $[\min(a, b), \max(a, b)]$  et dérivable en tout point de  $]\min(a, b), \max(a, b)[$ , alors il existe  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ , ou encore il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \theta(b - a))$ , ( $c = a + \theta(b - a)$ ). On peut donc reformuler le théorème des accroissements finis de la façon suivante :

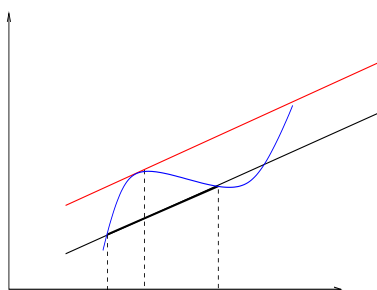
**Théorème 4.2.3.** *Soit  $f$  une fonction numérique continue sur un segment  $[a, b]$ ,  $a < b$ , dérivable en tout point de  $]a, b[$ . Alors, pour tout  $x, y \in [a, b]$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que :*

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(x + \theta(y - x)).$$

ou encore, en posant  $y - x = h$  :

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h).$$

**Remarque 4.2.2.** *Géométriquement le théorème 4.2.2 signifie qu'il existe un point  $M_c(c, f(c))$  de la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , tel que la tangente à  $\Gamma$  en  $M_c$  soit parallèle à la corde joignant les points  $M_a(a, f(a))$  et  $M_b(b, f(b))$ .*



**Corollaire 4.2.1** (Inégalité des accroissements finis). *Soit  $f$  une fonction numérique continue sur un segment  $[a, b]$ ,  $a < b$ , dérivable en tout point de  $]a, b[$ . On a :*

$$(i) \forall (x, y) \in [a, b]^2, x < y, |f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{x < t < y} |f'(t)|.$$

$$(ii) \forall (x, y) \in [a, b]^2, x < y, \forall L \in \mathbb{R}, |f(y) - f(x) - L(y - x)| \leq |y - x| \sup_{x < t < y} |f'(t) - L|.$$

*Démonstration.* L'inégalité (i) est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis. L'inégalité (ii) se déduit de (i) appliquée à  $t \mapsto f(t) - Lt$ . □

**Proposition 4.2.1** (Généralisation de la formule des accroissements finis). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques continues sur un segment  $[a, b]$ ,  $a < b$ , dérivables en tout point de  $]a, b[$  telles que  $g(a) \neq g(b)$ . Il existe alors un point  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\left| \begin{array}{cc} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{array} \right| = 0.$$

*Démonstration.* On applique le théorème de Rolle à la fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

## 4.2.2 Applications du théorème des accroissements finis

### Dérivées et monotonie

**Proposition 4.2.2.** Une fonction  $f$  est constante sur un intervalle  $I$  si, et seulement si elle admet une dérivée nulle en tout point de  $I$ .

*Démonstration.* La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons que la dérivée de  $f$  soit nulle sur  $I$ . Soit  $x_0$  un point fixe de  $I$ . Pour tout  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ , il existe  $c$  compris entre  $x$  et  $x_0$  tel que  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c) = 0$ , donc  $f(x) = f(x_0)$ , pour tout  $x \in I$ . □

**Corollaire 4.2.2.** Si deux fonctions ont la même dérivée sur un intervalle  $I$ , alors leur différence est constante.

**Proposition 4.2.3.** Soit  $f$  une fonction numérique continue sur un intervalle  $I$ , dérivable sur  $\overset{\circ}{I} := ]\inf I, \sup I[$ . Alors  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ , on a  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $f'(x) \leq 0$ ).

*Démonstration.* Si  $f \nearrow$  (resp.  $f \searrow$ ) sur  $I$ , alors  $f' \geq 0$  (resp.  $f' \leq 0$ ) sur  $\overset{\circ}{I}$ . Inversement, soient  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . Il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$ . On en déduit que  $f(y) - f(x) \geq 0$  (resp.  $f(y) - f(x) \leq 0$ ) si  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $f'(x) \leq 0$ ), pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ . □

**Remarque 4.2.3.** Si  $f'(x) < 0$  (resp.  $f'(x) > 0$ ), pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ , alors  $f$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur  $I$ .

La réciproque de ce résultat est fautive, comme le montre l'exemple de la fonction  $x \mapsto x^3$  qui est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et dont la dérivée s'annule à l'origine.

### Prolongement des fonctions dérivables

**Proposition 4.2.4** (prolongement des fonctions dérivables). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$  et telle que  $f'(x)$  admet une limite  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite (resp. vers  $b$  à gauche). Alors la fonction  $f$  admet une dérivée à droite en  $a$  (resp. une dérivée à gauche en  $b$ ) égale à  $l$ .

*Démonstration.* Démontrons la dérivabilité à gauche de  $f$  en  $b$  si  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = l$  existe. D'après le corollaire 4.2.1, on a pour tout  $x < b$  :

$$|f(x) - f(b) - (x - b)l| \leq (b - x) \sup_{x < t < b} |f'(t) - l|$$

D'où :

$$\left| \frac{f(x) - f(b)}{x - b} - l \right| \leq \sup_{x < t < b} |f'(t) - l| \xrightarrow{x \rightarrow b^-} 0$$

□

Donc  $f'_g(b) = l$ . On démontre, de même, que si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existe, alors  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

## Règle de l'Hôpital

**Théorème 4.2.4** ( Règle de L'Hôpital). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$ ,  $f$  et  $g$  deux applications continues sur  $I$ , dérivables sur  $I \setminus \{a\}$  et vérifiant  $f(a) = g(a) = 0$  et  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I \setminus \{a\}$ . Dans ces conditions si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ .

*Démonstration.* D'après le théorème de Rolle, puisque  $g(a) = 0$  et  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I \setminus \{a\}$ , on peut dire que  $g(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I \setminus \{a\}$ .

D'autre part, pour tout  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , il existe  $c(x)$  strictement compris entre  $a$  et  $x$  tel que  $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$  (cf. théorème 4.2.1). On a  $\lim_{x \rightarrow a} c(x) = a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ , donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = l$  (composition des limites). □

**Remarque 4.2.4.** La limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  peut exister sans que  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  admette une limite lorsque  $x \rightarrow a$ . Soient  $g(x) = x$  et  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ , mais  $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0.

**Exemple 4.2.1** (Application aux formes indéterminées). En utilisant plusieurs fois la règle de L'Hôpital, on peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

## 4.3 Fonctions hyperboliques

### 4.3.1 Fonctions hyperboliques directes

**Définition 4.3.1.** On désigne par :

- *sinus hyperbolique* l'application  $\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
- *cosinus hyperbolique* l'application  $\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
- *tangente hyperbolique* l'application  $\text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ .



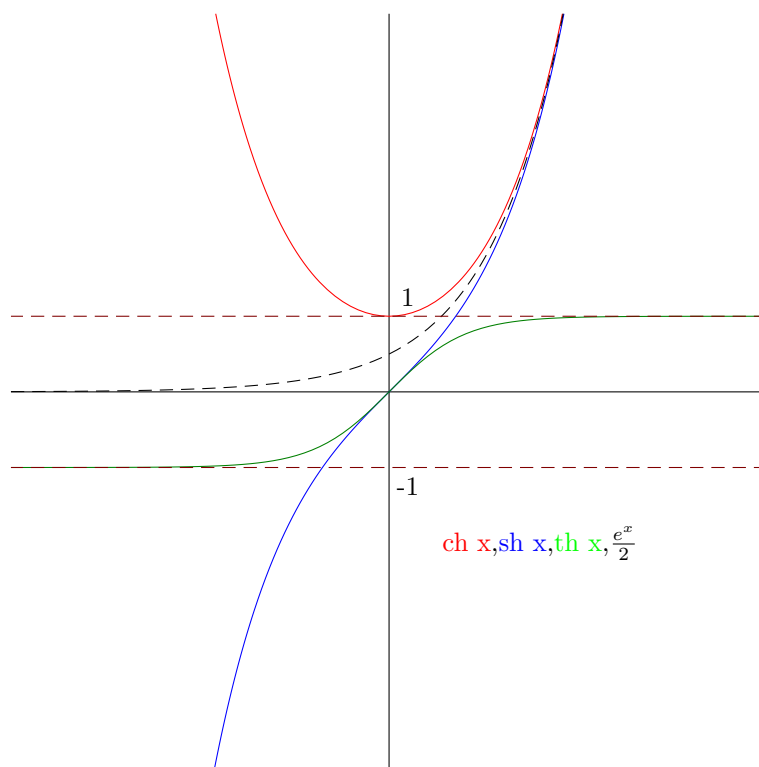
## Variations des fonctions hyperboliques

Les fonction sh, ch et th sont définies et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus, sh et th sont impaires et ch est paire.

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$ ,  $(\text{sh } x)' = \text{ch } x > 0$  et  $(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x > 0$ .  
Donc sh et th sont strictement  $\nearrow$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x > 0$ ,  $(\text{ch } x)' = \text{sh } x > \text{sh}(0) = 0$ , donc ch est strictement  $\nearrow$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch } x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th } x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$



## Trigonométrie hyperbolique

Les formules suivantes sont faciles à établir et sont analogues aux formules de trigonométrie circulaire.

$\begin{aligned} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x &= e^x \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\ \operatorname{sh}(x - y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x - y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{th}(x - y) &= \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\ 2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y) \\ 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y) \\ \operatorname{sh} a - \operatorname{sh} b &= 2 \operatorname{sh} \frac{a - b}{2} \operatorname{ch} \frac{a + b}{2} \\ \operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b &= 2 \operatorname{sh} \frac{a + b}{2} \operatorname{sh} \frac{a - b}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x &= e^{-x} \\ \operatorname{sh}(x + y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x + y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{th}(x + y) &= \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \\ \operatorname{ch} 2x &= 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 \\ \operatorname{th} 2x &= \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \\ 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y) \\ \operatorname{sh} a + \operatorname{sh} b &= 2 \operatorname{sh} \frac{a + b}{2} \operatorname{ch} \frac{a - b}{2} \\ \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b &= 2 \operatorname{ch} \frac{a + b}{2} \operatorname{ch} \frac{a - b}{2} \end{aligned}$
--	--

### 4.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

**Théorème et définition 4.3.1.** *L'application  $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'application  $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et l'application  $\operatorname{ch} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$  sont des bijections continues, strictement croissantes et dérivables. Leurs réciproques sont respectivement appelées **argument sinus hyperbolique** (notée  $\operatorname{Argsh}$ ), **argument tangente hyperbolique** (notée  $\operatorname{Argth}$ ) et **argument cosinus hyperbolique** (notée  $\operatorname{Argch}$ ).*

$\begin{aligned} (\operatorname{Argsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, (x \in \mathbb{R}); \\ (\operatorname{Argch} x)'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, (x > 1); \\ (\operatorname{Argth} x)' &= \frac{1}{1 - x^2}, (-1 < x < 1). \end{aligned}$
---

On a les formules suivantes :

$\begin{aligned} \operatorname{Argsh} x &= \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \\ \operatorname{Argth} x &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} \\ \operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) &= \sqrt{1 + x^2} \\ \operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) &= \sqrt{x^2 - 1} \\ \operatorname{th}(\operatorname{Argch} x) &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \\ \operatorname{ch}(\operatorname{Argth} x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \operatorname{Argch} x &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) &= x \\ \operatorname{th}(\operatorname{Argsh} x) &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \\ \operatorname{ch}(\operatorname{Argch} x) &= x \\ \operatorname{sh}(\operatorname{Argth} x) &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \operatorname{th}(\operatorname{Argth} x) &= x \end{aligned}$
--	--

*Démonstration.* Vérifions par exemple la première formule. On a :  $\text{Argsh } x = y \iff x = \text{sh } y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff x = \frac{t - 1/t}{2}$ , où  $t = e^y$ . On en déduit que  $t^2 - 2tx - 1 = 0$ . Donc  $t \in \left\{ x + \sqrt{x^2 + 1}, x - \sqrt{x^2 + 1} \right\}$ . Comme  $t = e^y > 0$ , on a  $t = e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$  et  $y = \text{Argsh } x = \log \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$ .  $\square$

# Bibliographie

- [1] Jacques Dixmier. *Cours de mathématiques du premier cycle, première année*. Gauthier-Villars.
- [2] François Liret & Dominique Martinais. *Mathématiques pour le DEUG, Analyse première année*. Dunod.
- [3] Jean-Pierre Ramis & André Warusfel. *Mathématiques Tout-en-un pour la licence, Niveau L1*. Dunod.

